

MATEMATIKA 2 (FMT) — 3. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Lahko pišete s svinčnikom.

15. september 2015

1. (20 točk) Poišči globalne minimume in maksimume funkcije f dane s predpisom

$$f(x, y) = e^{xy} \sin(y)$$

na območju $R = [-1, 1] \times [-1, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ in } |y| \leq 1\}$.

2. (20 točk) Ravninska krivulja ima enačbo v eksplisitni obliki: $y(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Izračunaj ukrivljenost v točki $(x, y) = (0, 1)$. Zapiši še enačbi tangente in normale v točki z x -koordinato $x = 2$.

3. V posodi je na začetku 100 l slane vode, ki vsebuje 0.1 kg soli na liter.

(a) (10 točk) V posodo doteka vsako minuto 5 l slane vode, ki vsebuje 0.2 kg soli na liter. Ravno toliko mešanice odteka. Kdaj bo v posodi 15 kg soli?

(b) (10 točk) Sedaj v posodo doteka vsako minuto 5 l čiste vode. Spet jo ravno toliko odteka. Kdaj bo v posodi 5 kg soli?

Voda v posodi je ves čas dobro premešana.

4. (20 točk) Za $a > 0$ ter $b > 0$, izračunaj:

$$\iint_{x>y>0} y^{a-1}(x-y)^{b-1}e^{-x}dxdy.$$

Namig: Uporabi Fubinijev izrek in postavi meje za dvojni integral tako, da bo notranji integral po y , zunanji pa po x . Pomagaj si še z Beta in Gamma funkcijama.

5. (20 točk) S pomočjo Gaussovega izreka izračunaj $\iiint_C \nabla \cdot \vec{R} dV$ vektorskega polja $\vec{R} = (x\sqrt{x^2 + y^2}, y\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$ po cilindru $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 5\}$.