MATEMATIKA 2 (FMT) — 1. kolokvij

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 110 točk, pri čemer za 100% velja 100 točk.

4. december 2014

1. (20 točk) Ali je funkcija $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dana z:
$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2^3 - y_2^3| + |x_3^5 - y_3^5|,$$
metrika na $\mathbb{R}^3$? Utemelji svoj odgovor.

2. (15 točk) Določi definicijsko območje funkcije f, dane s predpisom (za, kvečejmu, realne x-e):
$$f(x) = \log(x)/\sqrt{-x^2 + 5x + 2}$$
(funkcija f naj ima vrednosti v realnih številih).

3. (20 točk) Zaporedje $(a_n)_{n\geq 1}$ z vrednostmi v $\mathbb{R}^3$, je podano z:
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}, e^{-\sqrt{n}} \sin(n), 1/\log(n+1)\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$
Ali ima zaporedje limito (v običajni, Evklidski metriki)? Če jo ima, kaj je ta limita?

4. Na intervalu $[-1, 2]$ je dana funkcija $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, s predpisom $f(x) = x$, $x \in [-1, 2]$. Označimo njeno Fourierovo vrsto (na intervalu $[-1, 2]$) z $\tilde{f}$.
   (a) (20 točk) Razvij f v Fourierovo vrsto na intervalu $[-1, 2]$, t.j. določi koeficiente vrste $\tilde{f}$! Ali je vrsta $\tilde{f}$ povsod konvergentna?
   (b) (10 točk) Določi $\tilde{f}(-1)$, $\tilde{f}(0)$ in $\tilde{f}(2)$.

5. Naj bodo funkcije $f, X, Y, F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane s predpisi $f(x, y) = x^4 + x^2 + 2x^2y^2 + y^2 + y^4$; $X(r, \theta) = r\cos(\theta)$; $Y(r, \theta) = r\sin(\theta)$; in $F(r, \theta) = f(X(r, \theta), Y(r, \theta))$.
   (a) (10 točk) Izračunaj $\frac{\partial F}{\partial r}$ in $\frac{\partial F}{\partial \theta}$.
   (b) (10 točk) Pokaži da je funkcija F konstantna v drugi koordinati ("neodvisna" od θ), se pravi da je za vsak $r, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$: $F(r, \theta_1) = F(r, \theta_2)$. **Namig**: Uporabi $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ iz točke 5(a).
   (c) (5 točk) Za neko funkcijo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ torej velja $F(r, \theta) = g(r)$ za vsak $r \in \mathbb{R}$ in $\theta \in \mathbb{R}$. Določi funkcijski predpis g, tj. izrazi $g(r)$!