

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Fizikalna merilna tehnika, visokošolski študij

22. november 2011

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Na množici $M = (0, \infty) \times (0, \infty)$ je dan predpis

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := |x_1^2 - y_1^2| + |x_2 - y_2|.$$

- (a) [10] Dokažite, da je (M, d) metrični prostor.
(b) [10] V tem metričnem prostoru določite in narišite odprto kroglo $K((1, 0), 3)$.
(c) [10] Ali je (M, d) metrični prostor za $M = \mathbb{R}^2$?

Odgovore ustrezno utemeljite.

2. [15] Podano je zaporedje $\{\mathbf{a}_n\}$ v \mathbb{R}^2 ,

$$\mathbf{a}_n = \left(\frac{3n - 3}{\sqrt{n^2 + 4}}, \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} \right).$$

Izračunajte limito.

3. [15] Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{4} (\sin(2x) - x).$$

S pomočjo izreka o fiksni točki dokažite, da ima enačba $f(x) = x$ natanko eno rešitev. Kako bi jo poiskali?

4. [20] Funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} -\pi + x, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi + x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

razvijte v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

5. [15] Določite in narišite definicijsko območje funkcije

$$f(x, y) = \sqrt{x^{-2} - y} + \frac{1}{\log(y - 3 - 4x^2)}.$$

6. [10] Izračunajte limito

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(xy)}{(1+y)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Veliko uspeha pri reševanju!