MATEMATIKA 2 (FMT) — 2. kolokvij

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.
Uporaba kalkulatorjev ni dovoljena. Lahko pišete s svinčnikom.

29. januar 2015

1. Temperatura v nekem odprtem območju $O \subset \mathbb{R}^3$ je dana kot funkcija T ko-ordinat $(x, y, z) \in O$ takole (T_0 je strogo pozitivna realna konstanta):

$$T(x, y, z) = T_0 e^{-(2x^2+y^2+3z^2)}.$$

   (a) (10 točk) Izračunaj gradient ∇T v poljubni točki $(x, y, z) \in O$.

   (b) (5 točk) Določi hitrost spreminjanja temperature T v točki $P = (1, 0, 2)$ v smeri vektorja $(1, -1, \sqrt{2})$.

   (c) (5 točk) V kateri smeri v točki P temperatura najhitreje raste oz. pada?

2. (20 točk) Dana je plinska enačba idealnega plina $pV = nRT$. Izrazi p kot funkcijo V in T in razvij $p(V, T)$ v Taylorjevo vrsto okoli $(V, T) = (V_0, T_0)$ do vključno drugega reda. (n – množino snovi, ter R – splošno plinsko konstanto, obravnavaš kot konstanti.)

3. (20 točk) Najdi stacionarne točke funkcije f dane s predpisom

$$f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4 + 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Katere od teh stacionarnih točk (če sploh kakšne) so lokalni minimumi in katere lokalni maksimumi funkcije f?

4. (20 točk) Pokončni krožni valj (na kratko: valj) ima za osnovno ploskev krog z radijem r, ter višino h. Izmed vseh valjev z danim volumnom V_0 določi tistega z najmanjšo površino!

5. Dana je prostorska krivulja:

$$x(t) = t^4/12, \quad y(t) = t^3/6, \quad z(t) = 1 + t^2/2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   (a) (15 točk) V vseh točkah (kot funkcijo parametra t), razen v točki $(0, 0, 0)$, določi k tej krivulji *spremljajoči trieder* $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$.

   (b) (5 točk) Pri $t = 2$ določi enačbo tangente na to krivuljo.