

MATEMATIKA 2 (FMT) — 3. kolokvij (DE)

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Lahko pišete s svinčnikom.

22. april 2015

1. (20 točk) Snov izpareva proporcionalno svoji površini:

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha S,$$

kjer je V volumen snovi, S njena površina, t čas, α pa neka konstanta (ki zavisi od snovi in od okolja). Če se radij kroglice zmanjša iz 4 cm na 2 cm po 1 h, koliko časa bo še preteklo, preden pade radij kroglice na 1 cm. **Namig:** Volumen kroglice je $\frac{4}{3}\pi r^3$, njena površina pa $4\pi r^2$, kjer je r radij; določi diferencialno enačbo za r (kot funkcijo časa) in jo reši.

2. (20 točk) V gramu ogljika iz jamskih slik v jami Lascaux v Franciji se zgodi 1 radioaktivni razpad ogljika C-14 na minuto. Koliko so stare slike, če je v gramu ogljika iz današnjega lesa 6.68 razpadov ogljika C-14 na minuto? Razpolovna doba ogljika C-14 je približno $t_{1/2} = 5730$ let. **Namig:** Če je N število ogljikovih atomov, je $-dN/dt$, kjer je t čas, število razpadov na časovno enoto (minus rabimo, ker se število ogljikovih atomov zmanjšuje).

3. (20 točk) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$(3y^2 - 16xy + 20x^2)dx + (2xy - 4x^2)dy = 0$$

/na intervalu $(0, \infty)$ /. **Namig:** Če enačbo pomnožiš z x^a za ustrezen a , postane eksaktna.

4. (20 točk) Dana je diferencialna enačba dušenega nihanja $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, kjer pika ($\dot{}$) označuje odvod po času, $\{b, \omega_0\} \subset (0, \infty)$. Predpostavi, da je $b^2 < \omega_0^2$, in reši to diferencialno enačbo pri začetnih pogojih $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 \in (0, \infty)$.
5. (20 točk) Najdi splošno rešitev nehomogene Eulerjeve diferencialne enačbe $x^2 y'' - xy' + y = \ln(x)$.