

$v(0, 0, 0)$)

$$J_{\vec{s}} = \frac{1}{\|\vec{s}\|^2} \langle \mathcal{J}_{\vec{s}}, \vec{s} \rangle.$$

Kaj pa, če os ne gre skozi težišče? Spet brez dokaza povejmo **Steinerjevo formulo**, ki povezuje vztrajnostni moment okoli osi skozi težišče J in vztrajnostni moment okoli paralelne za R oddaljene osi

$$J' = J + mR^2.$$

Več o težiščih in momentih lahko bralec najde v [13]. V navedeni knjižici je tudi veliko elementarnih primerov.

6.9 Naloge

6.1 Zapiši integral funkcije f po ravninskem območju D

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

z dvakratnima integraloma v obeh vrstnih redih:

- i. D je trikotnik z oglišči $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ in $C(1, 1)$;
- ii. D je trapez z oglišči $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(2, 1)$ in $D(0, 1)$;
- iii. $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq y\}$.

6.2 Zamenjaj vrstni red integracije:

- i. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$;
- ii. $\int_{-6}^2 dx \int_{x^2/4-1}^{2-x} f(x, y) dy$;
- iii. $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$.

6.3 Izračunaj naslednje integrale:

- i. $\int \int_D xy^2 dx dy$, kjer je D območje, omejeno s parabolo $y^2 = 4x$ in premico $x = 1$;
- ii. $\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$, kjer je D paralelogram, omejen s premicami $y = 1$, $y = 3$, $y = x$ in $y = x + 1$;

iii. $\int \int_D |\cos(x+y)| dx dy$, kjer je D kvadrat $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

6.4 Izračunaj volumen telesa, omejenega z:

i. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$ in $z = 0$;

ii. $z = xy$, $x + y + z = 1$ in $z = 0$;

iii. $z = 1 - y^2$ in $z = x^2$.

6.5 Izračunaj integral:

i. $\int \int_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ po kolobarju $D = \{(x, y) : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$;

ii. $\int \int_D (x+y) dx dy$ po območju $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq x + y\}$;

iii. $\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$ po območju $D = \{(x, y) : x^4 + y^4 \leq 1\}$.

6.6 Izračunaj ploščino lika, ki ga v prvem kvadrantu omejuje krivulja:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}, \quad a, b, c > 0.$$

Uvedi nove spremenljivke $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$.

6.7 Izračunaj integral $\int \int \int_G xy^2 z^3 dx dy dz$ po območju, omejenem z $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ in $z = 0$.

6.8 Izračunaj integral:

i. $\int \int \int_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$ po območju $G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$;

ii. $\int \int \int_G (x^2 + y^2) dV$ po območju G , podanem z $x^2 + y^2 \leq 2z$ in $z \leq 2$;

iii. $\int \int \int_G z dV$ po območju G , omejenemu s ploskvama $x^2 + y^2 = 2z$ in $x + y = z$.

6.9 Izračunaj prostornino območja, omejenega z:

i. $z = 0$, $x^2 + y^2 = x$ in $z = x^4 y^4$;

ii. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$;

iii. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$, $a > 0$.

6.10 Izračunaj maso telesa omejenega s ploskvami $2y + z = 2$, $y + z = 1$, $y = x^2$, $x \geq 0$, če je gostota telesa enaka $\rho(x, y, z) = x$.

6.11 Določi težišče območja, omejenega z:

i. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x, y \geq 0$;

ii. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = xyz$, $x, y, z > 0$.

6.12 Poišči maso homogenega telesa z gostoto ρ , ki ga omejuje ploskev $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, $a > 0$. Izračunaj tudi vztrajnostne momente

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\rho dV, \quad I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\rho dV, \quad I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho dV$$

telesa, glede na osi x , y in z .