Zato so

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(3,2,7)=\frac{1}{4},\quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(3,2,7)=\frac{1}{5},\quad \frac{\partial g_1}{\partial x_3}(3,2,7)=\frac{-3}{20},$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(3,2,7)=\frac{-1}{2},\quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(3,2,7)=\frac{6}{5},\quad \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(3,2,7)=\frac{1}{10}.$$

$\diamondsuit$

## 2.10 Naloge

**2.1** Poišči definicijska območja naslednjih funkcij

i. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$;

ii. $z=\ln(-y^2+4x-8)$;

iii. $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$;

iv. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

**2.2** Izračunaj limite:

i. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

ii. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$;

iii. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

**2.3** Ali so naslednje funkcije zvezne v točki $T(0,0)$?

i. $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$; $\quad f(0,0)=0$;

ii. $f(x,y)=\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$; $\quad f(0,0)=0$?

**2.4** Skiciraj nivojnice za $z=-5,-4,\ldots,4,5$:

i. $z=xy$;

ii. $z=x^2y+x$;

iii. $z=y(x^2+1)$;

iv. $z = \frac{xy-1}{x^2}$.

**2.5** Izračunaj prve parcialne odvode po vseh spremenljivkah, ki nastopajo v danih funkcijah:

i. $z = x - y$;

ii. $z = x^3y - y^3x$;

iii. $z = \ln(x^2 + y^2)$;

iv. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

v. $u = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

**2.6** Izračunaj:

i. $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}(\pi/4, \pi)$, če je $u(\varphi, \vartheta) = \frac{\cos(\varphi-2\vartheta)}{\cos(\varphi+2\vartheta)}$;

ii. $\frac{\partial u}{\partial z}$ in $\frac{\partial u}{\partial t}$ v točki $z = b$, $t = a$, če je $u = \sqrt{az^3 - bt^3}$.

**2.7** Poišči popolni diferencial funkcije $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$.

**2.8** Približno izračunaj $\ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$.

**2.9** Oceni absolutno napako pri izračunu stranice trikotnika po formuli $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$! Kako napake pri merjenju stranic $b$ in $c$ ter kota $\alpha$ vplivajo na napako pri stranici $a$?

**2.10** Poišči naslednje posredne odvode:

i. $\frac{du}{dt}$, če je $u = e^{x-2y}, x = \sin t$, $y = t^3$;

ii. $\frac{\partial z}{\partial u}$ in $\frac{\partial z}{\partial v}$, če je $z = x^2 \ln y$, $x = u/v$, $y = 3u - 2v$;

iii. $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y}$, če je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

**2.11** Pokaži, da $y = f(x + at) + g(x - at)$, kjer je $a$ konstanta, $f$ in $g$ pa poljubni dvakrat zvezno odvedljivi funkciji, ustreza enačbi $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$!

**2.12** Izračunaj smerni odvod funkcije

$$f(x, y, z) = (x - y + z)\sin(x + yz - 1).$$

v točki $(1, 0, 1)$ v smeri vektorja $(-1, 2, 2)$.

**2.13** Dana je funkcija
$$f(x,y) = ye^x.$$
Razvij jo v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,0)$ do vključno členov tretjega reda.

**2.14** Dana je funkcija
$$f(x,y) = (x-y)e^{x+y-1}.$$
Razvij jo v Taylorjevo vrsto okoli točke $(1,0)$ do vključno členov drugega reda. S pomočjo dobljenega razvoja izračunaj približno vrednost $f(0.9, 0.2)$.

**2.15** Razvij funkcijo
$$f(x,y) = xe^{3xy}$$
v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,0)$. S pomočjo razvoja izračunaj $f_{xxxyy}(0,0)$.

**2.16** Poišči ekstreme funkcij dveh spremenljivk:

i. $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13$;

ii. $z = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$;

iii. $z = x^3 + y^3 - 3xy + 1$;

iv. $z = 3x^2y + 6xy^2 + 4y^3 - 3y$;

v. $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$;

vi. $z = x\cos x - xe^y$;

vii. $z = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$

in jih klasificiraj.

**2.17** Določi absolutni maksimum in absolutni minimum funkcije $f(x,y) = (3x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$!

**2.18** Poišči minimum funkcije $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ pri pogoju $x^3 + y^3 = 1$!

**2.19** Poišči najmanjšo vrednost funkcije
$$f(x,y) = xy$$
pri pogoju $x^2 + y^2 = 2a^2$.

**2.20** Izmed vseh trikotnikov z danim obsegom poišči tistega, ki ima največjo ploščino!

**2.21** Poišči najmanjšo razdaljo od koordinatnega izhodišča do parabole $y = x^2 - x - 1$.

**2.22** Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x - y + 1$$

na trikotniku z oglišči $A(0, 0), B(1, 0)$ in $C(0, 1)$.

**2.23** Poišči točki na elipsoidu

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 7$$

v katerih zavzame funkcija

$$f(x, y, z) = x - 2y - 2z + 1$$

največjo in najmanjšo vrednost.

**2.24** Funkcija $z = z(x, y)$ je podana v okolici točke $(0, 0)$ implicitno z enačbo

$$e^{xyz} - z = 0.$$

Izračunaj parcialne odvode $z_x, z_x, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$ v točki $(0, 0)$ in zapiši Taylorjev polinom funkcije $z$ do vključno členov z drugim odvodom.

**2.25** Funkcija $z = z(x, y)$ je dana implicitno z enačbo

$$\cos(yz) + e^{xz} - xy^2 + z = 1.$$

V točki $(0, 0)$ izračunaj parcialna odvoda $z_x, z_y$. S totalnim diferencialom izračunaj približno vrednost $z(0.1, -0.05)$.