5.4 Naloge

5.1 Poišči definicijsko območje funkcije, podane z integralom

$$f(y) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2}.$$

5.2 Naj bo realna funkcija g podana z integralom

$$g(y) = \int_0^y \frac{\log(1 + xy)}{x} dx.$$

Izračunaj odvod $g'(y)$ povsod, kjer obstaja.

5.3 Dani sta funkciji $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \int_0^1 \log(x^2 + t^2) dx,$$

$$g(t) = 2t \operatorname{arctg} \frac{1}{t} + \log(1 + t^2).$$

Dokaži, da je $f'(t) = g'(t)$.

5.4 Poišči tisti linearni približek $p(x) = ax + b$ za funkcijo $f(x) = x^2$, za katerega ima integral

$$g(a, b) = \int_1^3 (p(x) - f(x))^2 dx$$

najmanjšo vrednost.

5.5 Z odvajanjem po parametru ali z zamenjavo vrstnega reda integracije izračunaj integral:

$$f(a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \qquad b > a > 0.$$

5.6 Z odvajanjem po parametru ali z zamenjavo vrstnega reda integracije izračunaj integral:

$$f(a, b) = \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(Uporabi: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.)

5.7 S prevedbo na funkcijo Γ izračunaj integral

$$\int_0^\infty x^5 e^{-x^4}\,dx.$$

5.8 S prevedbo na funkcijo Γ izračunaj integral

$$\int_0^\infty e^{-x^3}\,dx.$$

5.9 Izračunaj integral

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\log\frac{1}{t}\right)^3}\,dt.$$

Nasvet: uvedi novo spremenljivko $x = \log t$ in integral prevedi na funkcijo Γ.

5.10 S prevedbo na funkcijo B izračunaj integral

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

5.11 Izračunaj limito

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}\,dx.$$

5.12 Izračunaj naslednje integrale:

i. $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x dx$,

ii. $\int_0^{\pi/2}\sin^8 x dx$,

iii. $\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\cos^4 x dx$,

iv. $\int_0^{\pi}\sin^5 x dx$,

v. $\int_0^{2\pi}\sin^7 x dx$,

vi. $\int_0^{2\pi}\cos^4 x dx$.

5.13 S prevedbo na funkcijo beta ali gama izračunaj naslednja integrala:

i. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$;

ii. $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^4}dx$.