1.3 Naloge

1.1 Katere izmed podanih preslikav iz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$ določajo metriko v $\mathbb{R}$?

i. $d_1(x, y) = |x^2 - y^2|$;

ii. $d_3(x, y) = \inf\{2, |x - y|\}$;

iii. $d_2(x, y) = 2|x - y|$;

iv. $d_4(x, y) = \sup\{2, |x - y|\}$.

Odgovore utemelji.

1.2 Definirajmo preslikavo iz $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}$ s predpisom $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |y_1 - y_2|$! Ali določa d metriko v $\mathbb{R}^2$?

1.3 Na množici $\mathbb{R}^2$ je dan predpis $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1^3 - x_2^3| + |y_1^5 - y_2^5|$. Pokaži, da je d metrika. Skiciraj kroglo $K((1, 0), 1)$.

1.4 V množici $\mathbb{R}$ je dan predpis

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d(x, y) = |x^2 - y^2| + |x - y|.$$

Pokaži, da je (M, d) metrični prostor. V tem metričnem prostoru določi odprto kroglo $K(0, 2)$.

1.5 Naj določa preslikava $d : X \times X \to \mathbb{R}$ metriko na množici X. Prepričaj se, da v isti množici določata metriko tudi funkciji:

i. $e(a, b) = \min\{1, d(a, b)\}$;

ii. $e(a, b) = d(a, b)/(1 + d(a, b))$.

1.6 Kakšen naj bo $n \in \mathbb{N}$, da bo pri danem $\varepsilon > 0$ člen zaporedja

i. $a_n = 1/(n + 3)$;

ii. $a_n = n/(n + 10)$;

iii. $a_n = n/(n - (-1)^n)$.

zagotovo znotraj krogle $K(1, \varepsilon)$? Poseben primer: $\varepsilon = 1/10$, $\varepsilon = 1/100$!

1.7 Utemelji ali sta naslednji množici odprti, zaprti ali nič od tega (v običajni evklidski metriki) v $\mathbb{R}$.

i. $\mathbb{Z} \cup (1, 2]$;

ii. $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$.

1.8 Dana je enačba

$$2x - \cos x = 0.$$

i. S pomočjo izreka o fiksni točki pokaži, da ima enačba eno samo pozitivno rešitev.

ii. To pozitivno rešitev poišči na dve decimalki natančno.

1.9 Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{2 + x^2} + \frac{5}{3}.$$

S pomočjo izreka o fiksni točki pokaži, da ima enačba $f(x) = x$ natanko eno rešitev $x = 2$.
Nasvet: Pokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

1.10 Kaj lahko povemo o Fourierovih koeficientih funkcije f, za katero velja $f(x + \pi) = -f(x)$?

1.11 Razvij funkcijo $f(x) = \sin(x + \pi/6)$ v Fourierovo vrsto na $[-\pi, \pi]$.

1.12 Razvij funkcijo $f(x) = \cos^4 x$ v Fourierovo vrsto na $[-\pi, \pi]$.

1.13 Funkcijo $f(x) = |x|$ razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $(-\pi, \pi)$. S pomočjo te vrste izračunaj vsoto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

1.14 Funkcijo $f(x) = \pi - |x|$ razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

1.15 Razvij funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} x; & 0 \leq x \leq 1 \\ 1; & 1 < x \leq 2 \\ 3 - x; & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu $[0, 3]$.

1.16 Razvij funkcijo $f(x) = |\cos 3x|$ v Fourierovo vrsto na $[-\pi, \pi]$.

1.17 V Fourierovo vrsto po samih kosinusih razvij funkcijo f, definirano na $[0, \pi]$, podano s pravilom

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \in (0, \frac{\pi}{2}] \\ 1; & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} .$$

1.18 Razvij funkcijo $f(x) = x(\pi - x)$ na intervalu $(0, \pi)$ v Fourierovo vrsto po samih sinusih in nato s pomočjo vrste seštej številsko vrsto:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots .$$