0.1. **Integriranje, ponovitev.**

1. Izračunaj nedoločene integrale:

$\int x\,dx$, $\int 2x^2 - \frac{1}{x^2}\,dx$, $\int (-5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})x^{\frac{1}{3}}\,dx$, $\int (1+x^3)^2\,dx$, $\int \frac{1}{x-3}\,dx$, $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$, $\int \arctan x\,dx$, $\int \cos(-x+2)\,dx$, $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$, $\int \tan x\,dx$, $\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$, $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$

0.2. **Metrični prostori.**

1. Naj bo $M = \mathbb{R}_+$, $d(x,y) = |\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}|$.

- Dokaži da je (M,d) metrični prostor.
- Določi $K(1,1)$, $\overline{K}(1,2)$.

1.1 Naj bo $d(x,y) = |x^2 - y^2|$.

- Ali je $(\mathbb{R}, d)$ metrični prostor?
- Ali je $(\mathbb{R}_+, d)$ metrični prostor?

2. Preveri da je $\mathbb{R}^2$ skupaj z $d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$ metrični prostor.

3. Naj bo $M = {\mathbb{R}_+}^2$ in $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |\ln\frac{x_1}{y_1}| + |\ln\frac{x_2}{y_2}|$.

- Pokaži da je (M,d) metrični prostor.
- Določi $K((1,e),1)$, $K((e,1),1)$, $K((1,e),2)$.

3.1 Naj bo d_2 evklidska metrika na $\mathbb{R}^2$ in $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ če $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{0})$ ležijo na isti premici oz. $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d_2(\mathbf{x},0) + d_2(\mathbf{0},y)$ sicer.

- Preveri da je d metrika na $\mathbb{R}^2$.
- Določi $K(\mathbf{0},1)$, $K((1,1),2)$.

4. Nariši zaprto kroglo polmera 1 okrog $(0,0)$ in $(1,2)$ v metrikah na R^2 :

- $d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$.
- $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$.
- $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$.

5. Naj bo $M = \mathbb{R}^2$. Katera točka na premici $y = -x+2$ je najbližja točki $(0,0)$ v metrikah

- d_1
- d_2
- d_∞

0.2.1. *Odprte, zaprte množice.*

1. Naj bo $d(x, y) = |x - y|$. Katere množice so odprte/zaprte? Določi tudi njihove robove.

- $(0, 1]$, $[0, 1)$, $[0, 1]$ v $(\mathbb{R}, d)$.
- $\mathbb{Q} \subset (\mathbb{R}, d)$. Uporabi $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
- $[0, 1] \times (0, 1] \subset \mathbb{R}^2$
- $(0, 1] \subset (0, 2)$
- $\mathbb{R} \times 0 \subset \mathbb{R}^2$.

0.3. **Prostor zveznih funkcij.**

Funkcija $d : [a, b] \to \mathbb{R}$ s predpisom $d_\infty(f, g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ je metrika na prostoru zveznih funkcij $\mathcal{C}[a, b]$.

1. Naj bo $M = [0, 1]$. Katere izmed naslednjih funkcij so v $K(f(x) = x^2, 1)$, $\overline{K}(f(x) = x^2, 1)$, $\partial K(f(x) = x^2, 1)$?

$g(x) = x$, $g(x) = x + 1$, $g(x) = x - 1$, $g(x) = \sin(x)$, $g(x) = 1$.

2. Naj bo $M = [0, 1]$. Določi $d_\infty(f(x) = x^2, g(x) = x)$, $d_\infty(f(x) = x, g(x) = -x)$, $d_\infty(f(x) = x^3, g(x) = 1 - x^2)$.

3. Naj bo $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$. Določi $d(f(x) = x, g(x) = 1 - x^2)$.

4. Za $n \in \mathbb{N}$ naj bo $f_n(x) = -1$ če $x \leq -\frac{1}{n}$, $f(x) = nx$ če $|x| < \frac{1}{n}$ in $f_n(x) = 1$ če $x \geq \frac{1}{n}$. Pri izbranem x definirajmo $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Izračunaj $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f)$ in $\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f)$.

0.3.1. *Zaporedja.*

1. Katera zaporedja so konvergentna? Določi limite, če obstajajo.

- $a_n = (-1/n, (-1)^n)$
- $a_n = (n/e^n, \sqrt{n})$
- $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \frac{n^2-n}{3n^2+1})$
- $a_n = ((-1)^n/n, \cos(n\pi/2))$.

0.3.2. *Izrek o fiksni točki.*

Naj bo (M, d) poln metrični prostor in $f : M \to M$ preslikava za katero obstaja $q < 1$, tako da za vse $x, y \in M$ velja $d(f(x), f(y)) \leq q\ d(x, y)$. Potem obstaja natanko en $x \in M$ ki zadošča $x = f(x)$. Fiksna točka x je limita zaporedja, definiranega kot $x_{k+1} = f(x_k)$ ($k \in \mathbb{N}$), kjer je začetni člen $x_0 \in M$ poljuben.

Da se preveriti da velja $|x_n - x_{n+1}| \leq q^n d(x_0, f(x_0))$ in $d(x_k, x) \leq d(x_0, f(x_0))q^k/(1-q)$ za vse $n, k \in \mathbb{N}$.

1. Naj bo $f(x) = 1 + e^{-x}$.
   - Preveri da f na $[a, \infty]$ zadošča pogojem izreka o fiksni točki ($a < 1$).
   - Izračunaj x na dve mesti natančno

2. Naj bo $f(x) = 1 - x^2/2 + x$. Preveri da f na vsakem intervalu $[\epsilon, 2-\epsilon]$ ($\epsilon > 0$) ustreza pogojem izreka o fiksni točki. Določi fiksno točko.

3. S pomočjo izreka o fiksni točki pokaži da ima enačba $2x - \cos(x) = 0$ (ekvivalentno $\cos(x)/2 = x$) eno samo rešitev na $\mathbb{R}_+$. Določi fiksno točko na 3 mesta natančno.

4. Newtonova metoda iskanja ničel $f(x) = 0$ uporabi izrek o fiksni točki za funkcijo $h(x) = x - f(x)/f'(x)$. Preveri da za dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo f funkcija h izpolnjuje izrek v neki okolici ničle.

0.4. **Fourierova vrsta.**

Naj bo $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ s kvadratom integrabilna funkcija. Njen Fourierov razvoj po ortogonalni bazi

$$\{1, \{\cos(kx)\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\sin(kx)\}_{k\in\mathbb{N}}\}$$

prostora s kvadratom integrabilnih funkcij je oblike

$$F(x) = 1/2a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Če pomnožimo f s funkcijami po katerih razvijamo in integriramo (torej izračunamo skalarni produkt) dobimo formule za koeficiente:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\, dx, b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(kx)\, dx.$$

Recimo da ima funkcija f v točki x nezveznost tipa skok (leva in desna limita funkcije obstajata) in obstaja v točki x leva in desna limita odvoda funkcije. Potem v točki x Fourierova vrsta konvergira proti povprečju med levo in desno limito funkcije.

1. Razvij $f(x) = \cos^3(x)$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

2. Razvij $f(x) = x$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

3. Razvij $f(x) = \begin{cases} x-1 & ; x \leq 0 \\ x & ; x > 0 \end{cases}$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

4. Razvij funkcijo $f(x) = sin(x)$ po funkcijah $\{cos(kx)\}_{k\in\mathbb{N}}$ na intervalu $[0, \pi]$. Najprej razširi funkcijo do sode funkcije na $[-\pi, \pi]$ in uporabi standarden Fourierov razvoj na $[-\pi, \pi]$. Pri integriranju si pomagaj z enakostjo $\sin(a)\cos(b) = 1/2(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

5. Naj bo $a \in (0, \pi)$ in $f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 < x \leq a \\ 1 & ; a < x < \pi \end{cases}$. Razvij f po funkcijah $\{sin(kx)\}_{k\in\mathbb{N}}$ na intervalu $[0, \pi]$. Najprej razširi f do lihe funkcije na intervalu $[-\pi, \pi]$.

5. Razvij funkcijo $f(x) = x(\pi - x)$ v Fourierovo vrsto na $[0, \pi]$ po sinusih. S pomočjo razvoja izračunaj vsoto vrste $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \ldots$.

6. Recimo da funkcija $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ zadošča $f(x) = f(\pi - x)$. Naj bo njen razvoj po sinusih $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k sin(kx)$. Pokaži da je $a_k = 0$ za vse sode k.

7. Funkcijo $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ razvijemo v Fourierovo vrsto po sinusih in kosinusih. Kaj velja za koeficiente če funkcija zadošča $f(x + \pi) = -f(x)$ za vse $x \in (-\pi, \pi)$?

0.4.1. *Razvoj na intervalu* $[a, b]$
.

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{k\pi x}{d}) + b_k \sin(\frac{k\pi x}{d}),$$

kjer je $d = (b-a)/2$ in

$$a_0 = \frac{1}{d}\int_a^b f(x)\,dx, a_k = \frac{1}{d}\int_a^b f(x)\cos(\frac{k\pi x}{d})\,dx, b_k = \frac{1}{d}\int_a^b f(x)\sin(\frac{k\pi x}{d})\,dx.$$

1. Razvij funkcijo $f(x) = |x - 1/2|$ v Fourierovo vrsto na $[0, 1]$.

0.5. **Funkcije več spremenljivk.**

1. Določi definicijska območja naslednjih funkcij
   - $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$
   - $f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$
   - $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$
   - $f(x, y) = \frac{1}{\sin(\pi x)\sin(\pi y)}$

- $f(x,y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$
- $f(x,y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln\sqrt{1-x^2-y^2}}$

2. Skiciraj nivojnice in grafe funkcij

- $f(x,y) = x - 2y + 1$
- $f(x,y) = x^2 + y^2$
- $f(x,y) = xy$
- $f(x,y) = (x^2-1)y$

0.5.1. *Zveznost in limita funkcij več spremenljivk.*

1. Preveri ali limite obstajajo in jih izračunaj:

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2)}$.

2. Naj bo $f(x,y) = \begin{cases} x+y & ; x^2+y^2 \leq 1 \\ x-y & ; x^2+y^2 > 1 \end{cases}$ V katerih točkah funkcija $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ni zvezna?

3. Naj bo $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ a & ; (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$ Določi $a \in \mathbb{R}$ tako da bo f zvezna povsod na $\mathbb{R}^2$.

4. Katera izmed funkcij je zvezna v $(0,0)$?

- $f(x,y) = \begin{cases} x & ; x = y^2 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$
- $f(x,y) = \begin{cases} 1/2 & ; x = y^2 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$

0.6. **Parcialni odvodi.**

1. Izračunaj vse parcialne odvode 1. reda

- $f(x,y) = x^3y^2 + x - y$
- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
- $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
- $f(x,y) = \arcsin(\sqrt{x+y})x$

2. Izračunaj vse parcialne odvode 2. reda za funkcijo $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ v točki $(1,-1)$.

3. Naj bo $f(x,y) = \ln(1-xy)$. Izračunaj $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(1,0)$.

0.7. **Posredno odvajanje.**

Naj bo $f(t) = u(x(t), y(t))$ kjer so $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljive funkcije. Potem velja

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

1. Naj bo $f(x,y) = x - y$ in $x(t) = t^2$, $y(t) = t$. Izračunaj $\frac{\partial}{\partial t} f(x(t), y(t))$.

2. Naj bo $f(x,z) = x/(1-z)$ in $x(y) = \cos(y)$, $z(y) = \sin(y)$. Izračunaj $\frac{\partial}{\partial y} f(x(y), z(y))$.

3. Naj bo $f(x,y,z) = xy/z$ in $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$, $z(t) = e^t$. Izračunaj $\frac{\partial}{\partial t} f(x(t), y(t), z(t))$.

4. Naj bo $z = x^2 \ln(y)$ in $x(u,v) = uv$, $y(u,v) = u + v$. Izračunaj $\frac{\partial}{\partial u} z(x(u,v), y(u,v))$ in $\frac{\partial}{\partial v} z(x(u,v), y(u,v))$.

5. Dani sta odvedljivi funkciji $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Naj bo $u(x,y) = x\phi(x+y) + y\psi(x+y)$. Poenostavi izraz $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy}$.

Polarne koordinate

$x(r,\phi) = r\cos(\phi)$, $y(r,\phi) = r\sin(\phi)$.

6. Naj bo $f(x,y) = x^2 y + y^2$. Izračunaj $\frac{\partial f}{\partial r}$ in $\frac{\partial f}{\partial \phi}$ v $(x,y) = (1,1)$.

7. Določi smerni odvod $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ v točki $(1,1)$ v smeri $(1,-1)$.

8. V kateri smeri funkcija $f(x,y) = x^2 - y^2$ v točki $(1,2)$ najhitreje narašča/pada?

0.8. **Taylorjeva vrsta.**

$f(a+h, b+k) = f(a+ht, b+kt)|_{t=1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^k f|_{(a,b)}$.

1. Razvij $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + x$ v vrsto okrog $(-1,2)$.

2. Razvij $f(x,y) = xy/(1+xy)$ v vrsto okrog $(0,0)$. Izračunaj $\frac{\partial^2 0 f}{\partial x^1 6 \partial y^4}(0,0)$ in $\frac{\partial^2 2 f}{\partial x^1 1 \partial y^1 1}(0,0)$.

3. Razvij $f(x,y) = e^x \sin(y)$ v vrsto okrog $(0,0)$.

4. Uporabi razvoj v vrsto do členov 1. reda in približno izračunaj $\sqrt{2(\sqrt{1.02}+(0.98)^2)}$.

0.9. **Ekstremi, največje in najmanjše vrednosti.**

1. Poišči ekstreme in določi njihov tip
   - $f(x,y) = x\sqrt{y} - x^2 - y - 6x + 3$
   - $f(x,y) = (x^2+y)\sqrt{e^y}$

2. Določi najmanjšo in največjo vrednost funkcije $f(x,y) = 2x - y$ na trikotniku ABC z oglišči $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,3)$.

3. Določi najmanjšo in največjo vrednost funkcije $f(x,y) = (x-1)^2 + (y+1)^2$ na območju podanem z $x^2+y^2 \leq 4$.

4. Opazujemo kvadraste škatle brez pokrova in z kvadratom za osnovno ploskev. Površina škatel je predpisana in enaka S. Določi rob kvadrata in višino za škatlo z največjo prostornino.

0.9.1. *Vezani ekstrem.*

1. Poišči ekstrem funkcije $f(x,y) = x^2+y^2$ pri pogoju $x^2-y^2=1$.

2. Poišči točke na elipsoidu $x^2+y^2+2z^2=7$ v kateri zavzame funkcija $f(x,y,z) = x - 2y - 2z$ največjo/najmanjšo vrednost.

0.10. **Krivulje.**

Naj bo krivulja podana parametrično kot $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (ali z naravnim parametrom $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$). Velja zveza $\dot{s}(t) = |\dot{\mathbf{r}}|$.

Enotski tangentni vektor $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}/|\dot{\mathbf{r}}|$, enotski vektor glavne normale $\mathbf{n} = \dot{\mathbf{t}}/|\dot{\mathbf{t}}|$, enotski binormalni vektor $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$. Računsko ugodnejši pristop upošteva da binormalni $\mathbf{b}$ vektor kaže v smeri $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$, vektor glavne $\mathbf{n}$ normale pa v smeri $\mathbf{b} \times \mathbf{t}$.

Fleksijska ukrivljenost $1/\rho = |\mathbf{t}'(s)| = |\dot{r} \times \ddot{r}|/|\dot{r}|^3$. Torzijska ukrivljenost $1/\tau = |\mathbf{n}'(s)| = (\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})/|r' \times \ddot{r}|^2$.

1.
   - Pokaži da je z enačbama $x^2 = 3y$, $3xy = z^2$ v okolici točke $T(1, 1/3, 1)$ podana krivulja (preveri tako da zapišeš parametrizacijo ali pa uporabiš izrek o implicitni funkciji)
   - Določi enotske vektorje $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ (tangenta, normala, binormala) v T.

2. Zapiši naravno parametrizacijo za krivuljo $x = e^t, y = e^{-t}, z = \sqrt{2t}$ in določi enačbo pritisnjene ravnine v v $(1, 1, 0)$ ter fleksijsko ukrivljenost.

3. Dana je krivulja $x = e^t \cos(t), y = e^t \sin(t), z = e^t$.

- Zapiši parametrizacijo krivulje z naravnim parametrom.
- Določi tangentni in normalni vektor v $t = 0$.
- Določi fleksijsko in torzijsko ukrivljenost v $t = 0$ ter središče pritisnjenega kroga.

0.11. **Ploskve.**

1.Preveri da je z enakostjo $x^2 + y^2 + z^2xy - z = 1$ v okolici točke $T(0, 0, -1)$ podana ploskev.

- Ploskev lahko predstavimo kot $z = z(x, y)$. Izračunaj $\frac{\partial z}{\partial x}(0)$ in $\frac{\partial z}{\partial y}(0)$ in določi normalni vektor na ploskev v T.
- Kako lahko hitreje določiš normalni vektor iz implicitnega zapisa? Določi tangentno ravnino na to ploskev v T.

2. Dana je ploskev $x = uv$, $y = u^2 + v^2$, $z = u - v$. Določi enačbo tangentne ravnine na ploskev v točki $(1, 2, 0)$.

3. Dani sta ploskvi $x^2 + y^2 = z^2$ in $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$. Pod kakšnim kotom se sekata v točki $(1, 0, 1)$?

Glavni ukrivljenosti ploskve sta ekstremni ukrivljenosti presekov ploskve z ravninami, pravokotnimi na tangentno ravnino. Kot taki sta rešitvi ekstremalnega problema; račun pokaže

$$det \begin{bmatrix} L - \lambda E, & M - \lambda F \\ M - \lambda F, & N - \lambda G \end{bmatrix} = 0$$

Tukaj so E, F, G koeficienti prve fundamentalne forme, L, M, N pa koeficienti druge fundamentalne forme. Za eksplicitno podano ploskev $z = f(x, y)$ imamo $E = 1 + f_x^2$,$F = 1 + f_x f_y$, $G = 1 + f_y^2$ in $L = f_{xx}/\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$, $M = f_{xy}/\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$, $N = f_{yy}/\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$.

4. Naj bo $a \neq 0$. Poišči glavni ukrivljenosti ploskve $xy = az$ v točki $T(a, a, a)$. Ali je točka T eliptična, hiperbolična, parabolična ?

0.12. **Integrali s parametrom.**

Naj bo f_y zvezna. Potem je

$$\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x,y) + b'(y)f(b(y),y) - a'(y)f(a(y),y).$$

1. Določi definicijsko območje funkcije $f(y) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx$ in izračunaj $f'(y)$.

2. Naj bo $f(a) = \int_0^b \frac{dx}{1+ax}$, kjer je $a, b > 0$. Izračunaj $\int_0^b \frac{xdx}{(1+ax)^2}$.

3. Naj bo $f(a) = \int_0^b \frac{dx}{x^2-a^2}$, kjer je $0 < a < b$. Izračunaj $\int_0^b \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$.

4. Funkcija $\operatorname{sgn}(x-y)$ ni zvezna na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$. Pokaži da je kljub temu funkcija $f(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)\,dx$ zvezna.

5. Naj bo $f(a) = \int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{x}\,dx$. Izračunaj $f'(a)$.

6. Naj bo $y(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos t)\,dt$. Pokaži da je $J_0 = y$ rešitev Besselove enačbe $xy'' + y' + xy = 0$. (namig: per partes)

7. Naj bo $f(t) = \int_0^1 \ln(t^2+x^2)\,dx$ in $g(t) = 2t\arctan(1/t) + \ln(1+t^2)$. Pokaži da velja $f'(t) = g'(t)$.

0.13. **Gama in Beta funkcija.**

$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\exp -t\ dt$, $s > 0$. $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\ dt$, $p, q > 0$.

Nekatere lastnosti: $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin(\pi s)$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. $B(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$. $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1} x \cos^{2b-1} x\,dx = \frac{1}{2}B(a,b)$.

1. Izračunaj $\int_0^\infty \exp(-t^3)\,dt$.

2. Izračunaj $\int_{-\infty}^\infty exp(-(t-a)^2/b)\,dt$, kjer $a, b > 0$.

3. Izračunaj $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$. (namig: najprej uporabi substitucijo $t = x^3$. $x \to x/(x+1)$ slika interval $(0,\infty)$ bijektivno na interval $(0,1)$)

4. Izračunaj $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}$.

5. Izračunaj $\int_0^\pi \sin^8(2x)\,dx$.

6. Izračunaj $\int_0^\pi \sin^5(x)\,dx$.

7. Izračunaj $\int_0^{2\pi} \cos^4(x)\,dx$.

0.14. **Večkratni integral.**

1. Zapiši integracijske meje če je območje
   - paralelogram s stranicami $x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$.
   - trikotnik s stranicami $x = 0$, $y = 0$ in $x + y = 2$.
   - $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \leq 0$.
   - $x + y \leq 1$, $x - y \leq 1$, $x \geq 0$.
   - omejeno s hiperbolo $y^2 - x^2 = 1$ in krožnico $x^2 + y^2 = 9$ ter vsebuje $(0, 0)$.
2. Zamenjaj vrstni red integriranja
   - $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$.
   - $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.
   - $\int_0^r dx \int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y) dy$.
   - $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$.

3. Izračunaj integrale
$\int\int_D (x^2 + y^2) dx\, dy$, D območje omejeno z $y = x^2$, $y^2 = x$
$\int\int_D 2x + y dx\, dy / \int\int_D 1 dx\, dy$, D območje omejeno z $x = 0$, $y = 0$ in $x + y = 3$.

0.15. **Polarne koordinate.**

1. Zapiši integracijske meje za naslednja območja (polarne koordinate)
$x^2 + y^2 \leq R^2$, $x \geq 0$
območje omejeno z $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$, $y = x$, $y = 2x$.

2. Izračunaj integrale v polarnih koordinatah:
$\int\int_D 1 - x - y dx\, dy$, D omejeno z $x^2 + y^2 = Rx$.
$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \log(1 + x^2 + y^2)\, dy$.
y-koordinata težišča $\int\int_D y dx\, dy / \int\int_D dx\, dy$, kjer je D območje omejeno z $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Namig: uporabi "raztegnjene" polarne koordinate $x = ar\cos(\phi)$, $y = br\sin(\phi)$.

3. Lemniskata je krivulja implicitno podana kot $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Zapiši njeno enačbo v polarnem zapisu in skiciraj krivuljo. Za primer $a = 1$ izračunaj ploščino desnega dela $(x > 0)$.

0.16. **Uvedba novih spremenljivk.**

$\int\int_{\Phi(D)} f(x,y)dx\ \ dy = \int\int_D f(\Phi(u,v))|J\Phi|du\ \ dv$. Tu je $(x,y) = \Phi(u,v) \in \Phi(D)$.

1. Naj bo D paralelogram, napet na premici $y = 2x$, $y = 1/4x$ z ogliščem v $(4,1)$. V integral $\int\int_D 1dx\ dy$ vpelji nove koordinate $u = y - 2x$, $v = y - 1/4x$.

0.17. **Trojni integral.**

1. Izračunaj integrale
1.$\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x+y+z)dz$
2.$\int\int\int_D 1dx\ dy\ dz$, D območje omejeno z $x = 0, y = 0, z = 0, z = 1 - 2x - y$.
3.$\int\int\int_D xydx\ dy\ dz$, D omejeno z $z = xy$, $x + y = 1$, $z = 0$ $(z > 0)$.

Cilindrične koordinate $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$,$z = z$.

Sferične koordinate $x = r\cos(\theta)\cos(\phi)$, $y = r\cos(\theta)\sin(\phi)$, $z = r\sin(\theta)$.

4. Zapiši integracijske meje v cilindričnih/sferičnih koordinatah in izračunaj prostornine območij:
Ω je območje omejeno z $x^2+y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = 1$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}/2$.
Ω je območje omejeno z $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$ in $z = x^2 + y^2$.
Ω je osmina sfere, ležeče v $x > 0, y > 0, z > 0$.

5. Izračunaj $\int\int\int_\Omega x^2 + y^2 dxdydz$, kjer je Ω območje omejeno z $r^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2$, $z > 0$.

6. Izračunaj vztrajnostni moment (okrog z-osi) preseka krogle $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ in stožca $z^2 = x^2 + y^2$.

7. Določi težišče telesa, omejenega z $z = a^2 - x^2 - y^2$ in $z = 0$. Določi tudi vztrajnostni moment okrog z-osi.

0.18. **Krivuljni integral funkcije.**

$\int_C f(x,y)\ \ ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\ \ dt$, $a \leq b$. Tukaj je $x = x(t), y = y(t)$, $a \leq t \leq b$ parametrizacija krivulje C.

1. Izračunaj $\int_C (x+y)\ ds$, kjer je C rob trikotnika z oglišči $(1,0)$, $(0,1)$ in $(0,0)$.

2. Izračunaj $\int_C xy\ ds$, kjer je C lok elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ $(x \geq 0, y \geq 0)$

3. Določi vztrajnostni moment parabole $y = x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$ okrog y-osi. Dolžinska gostota naj bo enakomerno enaka 1.

4. Določi vztrajnostni moment (okrog y osi) $\int_C x^2 ds$ trikotnika z oglišči $(-1,0)$, $(1,0)$ in $(0,1)$.

5. Parametriziraj krivuljo C, podano kot presek $xy+z^2=a^2$, $x=y$. Nato v dobljeni parametrizaciji zapiši krivuljni integral $\int_C \sqrt{2y^2+z^2}\, ds$.

0.19. **Krivuljni integral vektorskega polja.**

$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \int_a^b (\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}})dt$. Tukaj je $\vec{r}=(x,y)=(x(t),y(t))$ $(a\le t\le b)$ parametrizacija krivulje C.

1. Izračunaj delo, ki ga opravi sila $\vec{F}=(3xy,-y^2)$ vzdolž poti :

- $y=2x^2$ od $(0,0)$ do $(1,2)$,
- daljica od $(0,0)$ do $(1,2)$,
- trodelna pot AB, BC in CA, kjer je $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(0,3)$.

2. Naj bo $\vec{F}=(x,y)$. Izračunaj $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, kjer je C pot od $(0,0)$ do $(1,1)$ po paraboli $y=x^2$, in od $(1,1)$ do $(0,0)$ po paraboli $x=y^2$.

Dodatne naloge z rešitvami:

Pavlina Mizori Oblak, Matematika za študente tehnike in naravoslovja, II del.