1. kolokvij iz Moderne fizike, 28.11.2013 - rešitve

1. Označimo koordinate v zemljinem sistemu z x in ct, medtem ko sta x' in ct' koordinati v lastnem sistemu ladje zapornikov. Iz prvega v drugega se transformiramo z Lorentzovo transformacijo

$$x' = \gamma_1(x - \beta_1 ct)\,, \tag{1}$$
$$ct' = \gamma_1(ct - \beta_1 x)\,. \tag{2}$$

Privzamemo, da so zaporniki pobegnili ob času $t = 0$, in da so bili ulovljeni ob času t_1 (v zemljinem sistemu). Potem velja, da sta obe ladji prepotovali enako pot:

$$\beta_1 ct_1 = \beta_2 c(t_1 - \Delta t)\,, \tag{3}$$

kjer je $\Delta t = 1\,\text{leto}$. Tako dobimo

$$t_1 = \frac{\beta_2 \Delta t}{\beta_2 - \beta_1} = 19\text{ let} \quad (\text{novo leto } 2268/69)\,. \tag{4}$$

Razdalja x_1 ob ujetju je bila $x_1 = t_1\beta_1 c = 17.1$ sv.let, medtem ko je do sistema Gliese 667C 22.1 sv. let. Transformiramo dogodek (ct_1, x_1), da dobimo čas v sistemu ladje:

$$ct_1' = \gamma_1(ct_1 - \beta_1 t_1 \beta_1 c) \tag{5}$$
$$= ct_1\gamma_1(1 - \beta_1^2) \tag{6}$$
$$= ct_1/\gamma_1 \tag{7}$$
$$= 19\text{ let}/2.294 = 8.28\text{ let} \quad (\text{april, } 2258)\,. \tag{8}$$

Rezultat nam pove, da je lastni časovni interval med dogodkoma pomnožen z $1/\gamma_1$.

Hitrost zasledovalne ladje v sistemu ubežnikov dobimo po znanem transformacijskem predpisu za hitrost:

$$\beta_2' = \frac{\beta_2 - \beta_1}{1 - \beta_1\beta_2} = 0.345\,. \tag{9}$$

Zaporniki potujejo nazaj na Zemljo s hitrostjo β_3 še t_2 časa, kjer je

$$\beta_3 ct_2 = \beta_1 ct_1\,, \tag{10}$$
$$t_2 = \frac{\beta_1}{\beta_3}t_1 = 28.5\text{ let}\,. \tag{11}$$

Torej se vrnejo na zemljo leta $2250 + t_1 + t_2 = 2297$, konec junija. V času povratka je za zapornike preteklo nadaljnjih $t_2/\gamma_3 = 28.5/1.25$ let $= 22.8$ let, torej so se skupno postarali za 31.08 let.

2. Nabit delec ob prečenju električnega polja pridobi kinetično energijo $T = e_0U$, torej ima proton gibalno količino

$$cp_p = \sqrt{(m_pc^2 + T)^2 - m_p^2c^4} = \sqrt{2Tm_pc^2 + T^2}\,. \tag{12}$$

V magnetnem polju potem velja, da je časovni odvod gibalne količine enak Lorentzovi sili.

$$\frac{d(\gamma m_p \mathbf{v})}{dt} = \gamma m_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} m\mathbf{v} = e_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B} \,. \tag{13}$$

Iz zgornje enačbe razberemo, da je $d\gamma/dt = 0$, torej se hitrosti le spreminja smer. Ker sta $\mathbf{v}$ in $\mathbf{B}$ vseskozi pravokotna nam gibalna enačba opisuje kroženje, in imamo $|d\mathbf{v}/dt| = v^2/r$:

$$\gamma m_p v^2/r_p = e_0 v B \,, \tag{14}$$

$$r_p = \frac{\gamma m_p v}{e_0 B} = \frac{p_p}{e_0 B} \,. \tag{15}$$

Zgornjo zvezo smo izpeljali na vajah, zato je ni bilo potrebno ponovno izpeljevati na kolokviju. Iz znanega radija in magnetnega polja dobimo gibalno količino protona

$$c p_p = e_0 c B r_p = 300 \text{ MeV/T/m} \times 0.1 \text{ T} \times 1 \text{ m} = 30 \text{ MeV} \,, \tag{16}$$

in iz enačbe (12) še kinetično energijo

$$T = \sqrt{m_p^2 c^4 + (c p_p)^2} - m_p c^2 = 0.480 \text{ MeV} \,. \tag{17}$$

Antimion se pospeši preko enake napetosti ($U = 480$ kV), zato je njegova kinetična energija enaka kinetični energiji protona. Za razmerje radijev dobimo:

$$\frac{r_\mu}{r_p} = \frac{p_\mu}{p_p} = \sqrt{\frac{2T m_\mu c^2 + T^2}{2T m_p c^2 + T^2}} = 0.34 \,. \tag{18}$$

Antimion zakroži z radijem 34 cm. Pripomnimo še to, da je kinetična energija majhna v primerjavi mirovnima energijama obeh delcev, zato bi bila nerelativistična obravnava upravičena. V enačbi (18) lahko torej zanemarimo člen T^2:

$$\frac{r_\mu}{r_p} \approx \sqrt{m_\mu / m_p} \,. \tag{19}$$

3. De Brogliejeva valovna dolžina elektrona in pripadajoči k sta

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2 T}} = 0.39 \text{ nm} \,, \tag{20}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mc^2 T}}{\hbar c} = 16.2 \text{ /nm} \,. \tag{21}$$

Za sipalno stanje na potencialni stopnici s potencialom

$$V(x) = V_0 \theta(x) \tag{22}$$

lahko zapišemo prostorski del valovne funkcije kot

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & ; \quad x \leq 0 \\ A_2 e^{ik'x} & ; \quad x > 0 \end{cases} \,, \tag{23}$$

kjer je $k' = \sqrt{2m(T - V_0)}/\hbar < k$. Iz pogoja o zveznosti in odvedljivosti valovne funkcije v točki $x = 0$ dobimo pogoja

$$A_1 + B_1 = A_2\,, \tag{24}$$
$$k(A_1 - B_1) = k' A_2\,. \tag{25}$$

Od tu lahko izpeljemo izraza za transmisivnost (t) in reflektivnost (r):

$$r = \left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2 = \left(\frac{1 - k'/k}{1 + k'/k}\right)^2 \tag{26}$$
$$t = \frac{k'}{k}\left|\frac{A_2}{A_1}\right|^2 = \frac{4k'/k}{(1 + k'/k)^2}\,. \tag{27}$$

Iz dane gostote električnega toka je razvidno, da je $t = r = 1/2$. Iz enačbe $r = 1/2$ dobimo (enako bi dobili iz enačbe $t = 1/2$):

$$x^2 - 6x + 1 = 0\,, \tag{28}$$

kjer je $x = k'/k$. Zgornja enačba ima rešitvi $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Ker vemo, da je $V_0 > 0$ in posledično $k' < k$, moramo vzeti manjšo od obeh rešitev:

$$k'/k = \sqrt{\frac{T - V_0}{T}} = 3 - 2\sqrt{2} = 0.172\,, \tag{29}$$
$$\Rightarrow V_0 = 0.971\,T = 9.71\ \mathrm{eV}\,. \tag{30}$$

4. Iz formule za Comptonovo sipanje fotona na mirujočem elektronu,

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)\,, \tag{31}$$

kjer je θ sipalni kot fotona glede na prvotno smer, lahko iz končne smeri elektrona in ohranitve gibalne količine sklepamo, da je $\theta = 0$ bodisi $\theta = \pi$. V prvem primeru se valovna dolžina fotonu ne spremeni, zato tudi elektron ne prejme gibalne količine. Imamo torej $\theta = \pi$ in

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_C\,. \tag{32}$$

Sedaj zapišimo ohranitev energije:

$$\frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + mc^2 + T\,, \tag{33}$$

kjer smo izrazili energijo fotona z njegovo valovno dolžino. Nato upoštevamo še enačbo (31), od koder sledi

$$\lambda^2 + 2\lambda_C\lambda - \frac{2\lambda_C\,hc}{T} = 0\,, \tag{34}$$
$$\Rightarrow \lambda = \lambda_C\left(\sqrt{1 + mc^2/T} - 1\right) = 1.03\ \mathrm{pm}\,. \tag{35}$$

Sipani fotoni pod kotom $\pi/2$ imajo energijo

$$
\begin{aligned}
E'_\gamma &= \frac{hc}{\lambda'} && (36)\\
&= \frac{hc}{\lambda + \lambda_C} && (37)\\
&= \frac{hc}{\lambda_C\sqrt{1 + mc^2/T}} && (38)\\
&= \frac{mc^2}{\sqrt{1 + mc^2/T}} && (39)\\
&= 359\ \mathrm{keV}\,. && (40)
\end{aligned}
$$