Domače naloge iz Matematične fizike za Fizikalno merilno tehniko, 19.1.2009

1. Imejmo enostaven model plinaste zvezde, ki je sestavljena iz aktivne sredice s polmerom R_1 in plinastega ovoja iz Helija s polmerom $R_2 > R_1$. Recimo, da poznamo celoten energijski tok P (v Wattih), ki se sprošča v aktivnem jedru in pa temperaturo T_0 na površini zvezde (npr. nekaj tisoč K). Izračunaj najprej porazdelitev temperature po radialni koordinati $T(r)$ v plinastem ovoju. Predpostavi najprej, nekoliko nerealistično, da je plin idealen, da je konstanta toplotne prevodnosti λ neodvisna od temperature in gostote plina, in da ni konvekcije (torej, da se vsa toplota prenaša s prevajanjem). [Rešetič]

   Ob teh predpostavkah izrazi še radialno porazdelitev tlaka $p(r)$, če predpostaviš, da poznaš tlak na zunanji površini zvezde $p(R_2)$.

2. Enaka naloga kot prejšnja, s tem da bi zdaj bolj realistično izrazili toplotno prevodnost idealnega plina, namreč njena temperaturna odvisnost je $\lambda(T) = \lambda_0\sqrt{T/T_0}$, kjer je λ_0 neka znana konstanta toplotne prevodnosti na površini zvezde. [Ščetinec]

3. Zatesnjen votel tanek obroč s polmerom R je napolnjen z zrakom pri tlaku 1 bar. Obroč vrtimo s kotno hitrostjo ω okrog osi, ki gre skozi težišče obroča in je pravokotna na njegovo geometrijsko os (torej, leži v ravnini obroča). Gravitacijo zanemari. Poišči porazdelitev plina, npr gostoto $\rho(\phi)$, v vrtečem obroču.

4. Obroč iz zgornje naloge napolnimo z vodo in ga zavrtimo nad vodoravno podlago (tako, da je os vrtenja - orientirana glede na obroč kot povemo zgoraj - pravokotna na podlago). Na kateri višini na *zunanji* strani obroča moramo napraviti luknjico, da bo voda brizgala kar najdlje?

5. Enaka naloga kot zgoraj, le da tokrat luknjico v obroču napravimo na notranji strani (usmerjeno proti nasprotnemu delu obroča).

6. Enaka naloga kot zgoraj, le da tokrat luknjico v obroču napravimo s strani - torej luknjica gleda pravokotno na ravnino obroča.

7. Model difuzije na končnem prostoru. Vzemimo robota, ki se premika v eni smeri (npr na tirnici) v korakih dolžine $\Delta r = 1cm$, in vsako časovno enoto $\Delta t = 1s$ napravi en korak. Pred vsakim korakom robot z verjetnostjo p, $0 < p < 1$, spremeni smer gibanja.

   Recimo, da ima tirnica skupno dolžino L [cm], in je krožne oblike (ima obliko krožnice). Izračunaj ali z računalnikom simuliraj verjetnost $P(x,t)$, da je ob času t [s] robot na mestu x [cm], če veš, da je bil v začetku v izhodiščni točki tirnice $P(0,0) = 1, P(x \neq 0, 0) = 0$. Vrednost p si lahko izbereš, npr. $p = 0.5$, $p = 0.05$ in $p = 0.95$.

   Zanima nas predvsem po kolikšnem času t^* je verjetnost lege robotka praktično enakomerno porazdeljena po tirnici, in kako je ta "relaksacijski" čas odvisen od dol zine tirnice L, $t^*(L)$?

8. Enaka naloga kot zgoraj, le da je tirnica zdaj ravna z odrezanima koncema. Ko robotek pride do konca tirnice, se vedno obrne.

9. Po okenskem steklu polzijo kaplje kondenzirane vode. Po vsakem centimetru vertikalne poti kapljice, se le ta premakne naključno, z verjetnostjo 1/2, oddrsne 1mm v levo in verjetnostjo 1/2, 1mm v desno. Voda se kondenzira enakomerno in naključno po vsej povr sini kvadratnega okna $1m \times 1m$. Zapiši porazdelitev vode na spodnjem robu, npr. verjetnostno gostoto $w(x)$ naključno izbrane kaplje po koordinati x spodnjega roba okenskega stekla. [Topolšek]

10. Podobna naloga kot zgoraj, le da zdaj kapljice vode vedno polzijo v desno (npr. zaradi gibanja zraka - vetra).

11. Imamo enakomerno nabit obroč s polmerom R in skupnim nabojem e, hkrati pa leži v njegovem težišču nasprotno enak naboj $-e$. Zapiši električno poljsko jakost $\vec{E}(\vec{r})$ v prostoru daleč stran od obroča $|\vec{r}| \gg R$.

12. Imamo dva vodnika superprevodna obročka s polmerom R, ki ju postavimo vzporedno enega nad drugim, v razdalji a. Po njiju tečeta po velikosti enaka električna tokova I, vendar v nasprotnih smereh. Zapiši magnetno poljsko gostoto $\vec{B}(\vec{r})$ v prostoru daleč stran od obročkov $\vec{r} \gg R, a$. [Svetin]

13. Izolirano kovinsko žico zvijemo v obliki petkrake zvezde - pentagrama z dolžino enega kraka enako a in po njej napeljemo električni tok I. Zapiši magnetno polje $\vec{B}(\vec{r})$ v prostoru.

14. Električni dipol $\vec{p}_e$ približamo razsežni kovinski plošči, tako da je med dipolom in ploščo razdalja d, in kot med dipolom in normalo na ploščo θ. Izračunaj površinsko gostoto naboja, ki se influencira v plošči, in silo med dipolom ter ploščo (velikost in smer), za poljubna d in θ.

15. Po dolgem debelem električnem vodniku z elipsastim presekom, s polosema a in b, teče električni tok z enakomerno gostoto $j = dI/dS$. Izračunaj magnetno polje v vodniku in v okolici vodnika. [Topolnik]

16. Izračunaj tenzor vztrajnostnega momenta, njegove lastne vrednosti in lastne osi za votel valj (polmer R in višina h) iz tanke pločevine s skupno maso m.

17. Vzemimo $N+1$ enakih čebrov z vodo prostornine $V = 0.1m^3$ in jih postavimo v obliki zvezde, en čeber damo v sredino, preostalih N pa posadimo okrog njega. Vse čebre povežemo s sredinskim s po dvema cevema po katerih se izmenjuje voda v obe smeri, po vsaki s pretokom $\phi_V = 10cm^3/s$. V enega od stranskih čebrov vlijemo strupeno snov s koncentracijo $c_0 = 1kmol/m^3$. Izračunaj in primerno predstavi časovno odvisnost koncentracije $c_n(t)$ v vseh čebrih, za nekaj različnih N-jev, npr. $N = 2, 3, 10, 50$. Ali znaš problem točno analitično rešiti za majhen N, npr $N = 2$? [Češarek]

18. Podobno kot zgornja naloga, le da N čebrov razporediš v krogu in jih povežeš v obliki obročaste verige. V splošnem vzemi volumski pretok iz levega v desni čeber ϕ_L in volumski pretok iz desnega v levi čeber ϕ_D, kot dva različna parametra. Računaj npr z $\phi_L = 10cm^3/s$ in $\phi_D = 20cm^3/s$. Problem analitično reši za poljuben N (podobno kot smo rešili na predavanjih problem nihanj harmonskega kristala v eni dimenziji). Opiši kako se premika maksimum koncentracije po čebrih kot funkcija časa, koliko časa traja, da se strup praktično povsem "razleze" po posodah? [Miklavčič]

19. Opiši majhna nihanja treh matematičnih nihal - točkastih mas m na lahkih togih prečkah dolžine l, ki jih obesiš enega za drugim - prvega pa na strop, tako da se lahko vsa pritrdišča prosto pregibajo v isti ravnini. Izračunaj lastne frekvence in lastna nihanja.

20. Podobna naloga kot zgornja, le da za samo dve nihali, ki pa lahko nihata prosotorsko - t.j. pritrdišči se lahko prosto pregibata v dveh neodvisnih prostorskih smereh.