Analiza 2a

Pisni izpit

30. 1. 2014

Ime in priimek

Vpisna številka

Σ

Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$.

Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

$\boxed{\text{N}}$ Če ima funkcija $f(x, y)$ razvoj v Taylorjevo vrsto v točki (a, b) in ta vrsta konvergira v okolici točke (a, b), njena vsota v neki okolici (a, b) sovpada s funkcijo f.

$\boxed{\text{P}}$ Če je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva v okolici stacionarne točke (a, b) in velja $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 < 0$, potem f v točki (a, b) ne more zavzeti najmanjše vrednosti.

$\boxed{\text{N}}$ Vsaka skoraj povsod zvezna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je integrabilna na kvadru $[0, 1] \times [0, 2]$.

$\boxed{\text{N}}$ Za vsako število $x > -1$ velja $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

$\boxed{\text{N}}$ Če za diferenciabilno funkcijo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ velja $f(a, b, c) = 0$ in $f_z(a, b, c) = 0$, iz enačbe $f(x, y, z) = 0$ ne moremo izraziti koordinate z v obliki $z = g(x, y)$, kjer je g funkcija, diferenciabilna v okolici točke (a, b).

$\boxed{\text{N}}$ Fourierova vrsta funkcije $f(x) = x$ enakomerno konvergira na $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{P}}$ Če ima rob omejene množice $A \subset \mathbb{R}^n$ prostornino 0, je vsaka zvezna funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Riemannovo integrabilna na množici A.

$\boxed{\text{P}}$ Če je $f(a, x)$ taka zvezna funkcija, definirana na $[0, 3) \times [0, \infty)$, da je integral $F(a) = \int_0^\infty f(a, x)dx$ enakomerno konvergenten na $[0, 2)$, je F zvezna v točki 1.

$\boxed{\text{P}}$ Enačba $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ne določa gladke podmnogoterosti v $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{N}}$ Funkcija $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je povsod diferenciabilna.

ANALIZA 2a: Pisni izpit

30. 1. 2014

Čas pisanja je 110 minut. Možno je doseči 100 točk.

Veliko uspeha!

Naloga 2

Enačbi $x^2 + y^2 = 5$ in $z = 0$ podajata krožnico K v prostoru, enačba $x + 2y + 3z = 12$ pa ravnino Π. Določi točke na krožnici K, ki so od ravnine Π najbolj oddaljene in točke na ravnini Π, ki so najbližje krožnici K.

Naloga 3

Razvij $f(x) = \sin x$ v kosinusno Fourierovo vrsto na intervalu $[0, \pi]$ in določi vsoto

$$S = \frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \cdots.$$

Naloga 4

Homogeno telo $D \subset \mathbb{R}^3$ z maso m je podano z relacijami $z \geq 0$, $z \leq x^2 + y^2$ in $x^2 + y^2 \leq 4y$. Izračunaj prostornino telesa D in njegov vztrajnostni moment J okrog osi z.
POMOČ: $J = \int_D (x^2 + y^2) dm$

Naloga 5

Za $n \geq 2$ sta dana območje $D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ in zvezna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dokaži, da za poljubna števila $p_1, p_2, \ldots, p_n \geq 1$ velja

$$\int_D f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) x_1^{p_1 - 1} x_2^{p_2 - 1} \cdots x_n^{p_n - 1} dV = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_1 + \cdots + p_n)} \int_0^1 f(t) t^{p_1 + p_1 + \cdots + p_n - 1} dt.$$

POMOČ: Nalogo najprej reši v primeru, ko je $n = 2$.

(2) Predznačena oddaljenost (x,y,z) od ravnine $ax+by+cz=d$ je $\frac{ax+by+cz-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, torej

def. $L = \underbrace{x+2y+3z-12}_{f} + \lambda(x^2+y^2) + \mu z$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1+2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2+2\lambda y = 0 \end{aligned}\right] \xRightarrow{\lambda \neq 0} y = 2x$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 3+\mu = 0$$

$$\xRightarrow{\text{krožnica}} x^2+4x^2 = 5 \Longrightarrow x = \pm 1$$

$$\Longrightarrow y = \pm 2$$

$T_1(1,2,0)$, $T_2(-1,-2,0)$

$f(1,2,0) = 1+4-12 = -7$

$f(-1,-2,0) = -1-4-12 = -17$

$\Longrightarrow$ $\boxed{T_2 \text{ je od } \pi \text{ najbolj oddaljena}}$ 14

Ker je T_1 najbližja ravnini dobimo tč. $A \in \pi$, ki je najbliže K tako, da T_1 projeciramo na π (v smeri $\vec{n} = (1,2,3)$)

$\Longrightarrow A(1+t, 2+2t, 3t) \in \pi \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 1+t+4+4t+9t = 12 \Longrightarrow 14t = 7 \Longrightarrow t = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{A\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)}$ 6

(3) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 \,; & n \text{ liho} \\ \frac{2}{\pi} \, \frac{(n-1)-(n+1)}{(n+1)(n-1)} \,; & n \text{ sodo} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sin x = \frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-4}{\pi(2m+1)(2m-1)}}_{a_{2m}} \cos(2mx)}$$

(12)

$$\text{Parseval}: \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin^2 x}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)} dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}^2$$

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{8}{\pi} + \frac{16}{\pi}\cdot S$$

(8)

$$\Longrightarrow S = \frac{\pi}{16}\left(\pi - \frac{8}{\pi}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi^2 - 8}{16}}}$$

4 Cilindrične koor. $\quad r^2 \le 4r\sin\varphi$

$$V = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{4\sin\varphi} r\,dr \int_0^{r^2} dz = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{4\sin\varphi} r^3\,dr =$$

$$2p-1 \qquad 2q-1=0$$

$$=64\int_0^{\pi} \sin^4\varphi\,d\varphi = 64\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= 64\,B\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}\right) = 64\cdot\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi}{2} = 24\pi$$

1 $\quad \cancel{10}$

$$\varrho = \frac{m}{24\pi}$$

$$J = \int_D \varrho\cdot r^2\,dV = \frac{m}{24\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{4\sin\varphi} r^3\,dr \int_0^{r^2} dz =$$

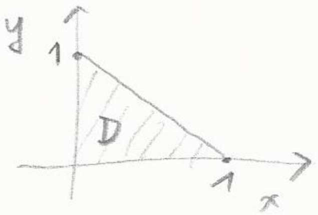
$$= \frac{2m}{24\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4^6\sin^6\varphi}{6}\,d\varphi = \frac{\cancel{2}\cdot 4^4 m}{9\pi}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}B\left(\tfrac{7}{2},\tfrac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{4^4 m\cdot 5\cdot \cancel{3}\cdot 1\cdot \cancel{\pi}}{9\cancel{\pi}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot \cancel{3}\cdot 2} = \frac{80m}{9}$$

12

(5) $\boxed{n=2}$: $x_1 \to x$, $x_2 \to y$, $p_1 \to p$, $p_2 \to q$

$$\int_D f(x+y)\, x^{p-1} y^{q-1}\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x+y)\, x^{p-1} y^{q-1}\, dy =$$

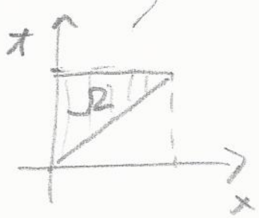


$t = x+y$

$dt = dy$

$$= \int_0^1 dx \int_x^1 f(t)\, x^{p-1} (t-x)^{q-1}\, dt = \int_0^1 dt \int_0^t f(t)\, x^{p-1} (t-x)^{q-1}\, dx =$$

Ω :



$$= \int_0^1 dt \int_0^1 f(t)\, t^{p-1} u^{p-1}\, t^{q-1} (1-u)^{q-1}\, t\, du =$$

$x = tu$

$$= B(p,q) \int_0^1 f(t)\, t^{p+q-1}\, dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_0^1 f(t)\, t^{p+q-1}\, dt$$

$\boxed{n \to n+1}$

$$\int_{D_{n+1}} f(x_1 + \dots + x_n + x_{n+1})\, x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} x_{n+1}^{p_{n+1}-1}\, dV =$$

$$= \int_{D_n} x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} \underbrace{\int_0^{1-x_1-\dots-x_n} f(x_1 + \dots + x_n + x_{n+1})\, x_{n+1}^{p_{n+1}-1}\, dx_{n+1}}_{g(x_1+\dots+x_n)} =$$

$$\overset{\text{I.P.}}{=} \overbrace{\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\dots+p_n)}}^{C_n} \cdot \int_0^1 g(t)\, t^{\overbrace{p_1+\dots+p_n}^{A_n}-1}\, dt =$$

$$g(t) = \int_0^{1-t} f(t + x_{n+1})\, x_{n+1}^{p_{n+1}-1}\, dx_{n+1}$$

$$= C_n \cdot \int_0^1 dt \int_0^{1-t} f(t + x_{n+1})\, x_{n+1}^{p_{n+1}-1}\, t^{A_n - 1}\, dx_{n+1} \overset{n=2}{=}$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\cancel{\Gamma(A_n)}} \cdot \frac{\cancel{\Gamma(A_n)}\,\Gamma(p_{n+1})}{\Gamma(A_n + p_{n+1})} \int_0^1 f(t)\, t^{A_n + p_{n+1} - 1}\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n+1})}{\Gamma(p_1+\dots+p_{n+1})} \int_0^1 f(t)\, t^{p_1+\dots+p_{n+1}-1}\, dt \quad \checkmark$$