**Rešitve 1. kolokvija iz ANALIZE II (5. 12. 2009)**

1. Dana je množica $A = (\{-2\} \times \mathbb{R}) \cup \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Za funkcijo $f$, podano s predpisom
$$f(x,y) = d((x,y),A)$$
dokaži, da je zvezna, in ugotovi ali je diferenciabilna v točki $(-1,0)$.

   REŠITEV: Označimo $A_1 = \{-2\}\times\mathbb{R}$ in $A_2 = \{(0,0)\}$. Tedaj sta $d((x,y),A_1) = |x+2|$ in $d((x,y),A_2) = \sqrt{x^2+y^2}$ zvezni funkciji ter
$$f(x,y) = \min(d((x,y),A_1), d((x,y),A_2).$$
   Minimum nenegativnih števil lahko izrazimo s formulo
$$\min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2},$$
   zato je tudi $f$ zvezna funkcija. Točke, ki so enako oddaljene od $A_1$ in $A_2$ ustrezajo pogoju $x+2 = \sqrt{x^2+y^2}$, saj očitno ležijo desno od premice $A_1$, torej je krivulja, kjer se predpis za $f(x,y)$ menja, parabola $P$ z enačbo $y^2 = 4x+4$. Funkcijo $f$ tako lahko zapišemo s predpisom
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & ; \quad y^2 \leq 4x+4 \\ x+2 & ; \quad y^2 \geq 4x+4, x \geq -2 \\ -x-2 & ; \quad x \leq -2 \end{cases}.$$
   Za parcialni odvod $f_x(-1,0)$ tedaj dobimo limiti
$$f_x^+(-1,0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h,0)-f(-1,0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{(h-1)^2+0^2}-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-h-1}{h} = -1$$
   in
$$f_x^-(-1,0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h,0)-f(-1,0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(h-1)+2-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = 1.$$
   Ker sta leva in desna limita različni, odvod $f_x(-1,0)$ ne obstaja, zato funkcija $f$ ni diferenciabilna v $(-1,0)$.

2. Naj bosta in $r$ in $\varphi$ polarni koordinati ter $x = r\cos\varphi$ in $y = r\sin\varphi$ običajni kartezični koordinati. Za dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo $u$ prevedi izraz
$$I = ru_{r\varphi} - u_\varphi$$
   v kartezične koordinate.

   REŠITEV:

Velja $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi = -y$ in $\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi = x$, torej je

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}$$

in

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Od tod izrazimo

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right) \circ \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-xy\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right) + y\left(-\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right) + xy\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Sledi

$$I = -xyu_{xx} + xu_y + x^2u_{xy} - yu_x - y^2u_{xy} + xyu_{yy} + yu_x - xu_y = xy(u_{yy} - u_{xx}) + (x^2 - y^2)u_{xy}.$$

3. Dana je enačba

$$ax + bz + xy - y^2\cos yz + 1 = 0.$$

kjer je $b > 1$. Dokaži, da dana enačba v okolici točke $(0,1)$ določa neskončnokrat odvedljivo funkcijo $z = f(x,y)$. Določi parametra $a$ in $b$ tako, da bo $(0,1)$ stacionarna točka funkcije

$$g(x,y) = x - y + f(x,y)$$

in ugotovi ali je točka $(0,1)$ tedaj lokalni ekstrem funkcije $g$.

Rešitev: Če vstavimo $(x,y) = (0,1)$, iz dane ena čbe dobimo

$$bz - \cos z + 1 = 0,$$

oz. $bz + 1 = \cos z$, ki ima edino rešitev $z = 0$. Sedaj uporabimo izrek o omplicitni funkciji v točki $(0,1,0)$. Za funkcijo $F(x,y,z) = ax + bz + xy - y^2\cos yz + 1$ tako izračunamo $F_z = b + y^3\sin yz$. Ker je $F_z(0,1,0) = b \neq 0$, po izreku o implicitni funkciji lokalno obstaja $C^\infty$-funkcija $z = f(x,y)$. Izračunajmo s pomočjo posrednega odvajanja odvode funkcije $z = f(x,y)$. Dobimo

$$a + bz_x + y + y^3(\sin yz)z_x = 0,$$

od koder sledi $z_x(0,1) = -\frac{a+1}{b}$ in $g_x(0,1) = 1 - \frac{a+1}{b}$ ter

$$bz_y + x - 2y\cos yz + y^2(\sin yz)(z + yz_y) = 0,$$

kar pomeni $z_y(0,1) = \frac{2}{b}$ in zato $g_y(0,1) = \frac{2}{b} - 1$. Ker zahtevamo, da je $(0,1)$ stacionarna točka za $g$, velja $b = 2$ in $a = 1$. S posrednim odvajanjem izračunajmo še druge odvode. Dobimo

$$bz_{xx} + y^4(\cos yz)(z_x)^2 + y^3(\sin yz)z_{xx} = 0,$$

od koder $z_{xx}(0,1) = -\frac{1}{2} = g_{xx}(0,1)$,

$$bz_{xy} + 1 + 3y^2(\sin yz)z_x + y^3(\cos yz)(z + yz_y)z_x + y^3(\sin yz)z_{xy} = 0,$$

kar pomeni $z_{xy}(0,1) = 0 = g_{xy}(0,1)$ in nazadnje

$$bz_{yy} - 2\cos yz + 4y(\sin yz)(z+yz_y) + y^2((\cos yz)(z+yz_y)^2 + (\sin yz)(2z_y + yz_{yy})) = 0,$$

od koder dobimo $z_{yy}(0,1) = \frac{1}{2} = g_{yy}(0,1)$. Determinanta matrike $Hg(0,1)$ je negativna, zato $g$ nima ekstrema v točki $(0,1)$.

4. Dana je funkcija $f$ s predpisom

$$f(x,y,z) = \frac{e^{1+xy^3}\sqrt{1 + x^2yz^3}}{1 - xz^2}.$$

Določi parcialna odvoda $\frac{\partial^{2009} f}{\partial x^{669}\partial y^{306}\partial z^{1034}}(0,0,0)$ in $\frac{\partial^{2009} f}{\partial x^{250}\partial y^{750}\partial z^{1009}}(0,0,0)$.

Rešitev: Zapišimo

$$f(x,y,z) = e \cdot e^{xy^3}(1 + x^2yz^3)^{1/2}\frac{1}{1 - xz^2} =$$

$$= e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k y^{3k}}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l}x^{2l}y^l z^{3l} \cdot \sum_{m=0}^{\infty}x^m z^{2m}.$$

Od tod dobimo razvoj okrog točke $(0,0,0)$

$$f(x,y,z) = \sum_{k,l,m=0}^{\infty}\frac{e}{k!}\binom{1/2}{l}x^{k+2l+m}y^{3k+l}z^{3l+2m}.$$

Iskana odvoda lahko izračunamo iz koeficientov pri monomih $x^{669}y^{306}z^{1034}$ in $x^{250}y^{750}z^{1009}$. Za koeficient pri $x^{669}y^{306}z^{1034}$ nastavimo enačbe $k+2l+m = 669$, $3k + l = 306$ in $3l + 2m = 1034$ iz katerih izračunamo $k = 2$, $l = 300$ in $m = 67$. Koeficient pri $x^{669}y^{306}z^{1034}$ je tako enak

$$\frac{e}{2!}\binom{1/2}{300} = \frac{-e \cdot 597!!}{2^{301}} = \frac{1}{2009!}\frac{2009!}{669! \cdot 306! \cdot 1034!}\frac{\partial^{2009} f}{\partial x^{669}\partial y^{306}\partial z^{1034}}(0,0,0).$$

Sledi

$$\frac{\partial^{2009} f}{\partial x^{669}\partial y^{306}\partial z^{1034}}(0,0,0) = \frac{-e \cdot 597!! \cdot 669! \cdot 306! \cdot 1034!}{2^{301}}.$$

Enačbe $k + 2l + m = 250$, $3k + l = 750$ in $3l + 2m = 1009$ za koeficient pri monomu $x^{250}y^{750}z^{1009}$ nam ne dajo nenegativnih celih rešitev, zato velja

$$\frac{\partial^{2009} f}{\partial x^{250}\partial y^{750}\partial z^{1009}}(0,0,0) = 0.$$