**Rešitve 2. kolokvija iz ANALIZE II (20. 1. 2010)**

1. Naj bo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in

$$F(y) = \int_y^{y^2} dx \int_{y-x}^{y} g(y^3 t)dt.$$

a) Dokaži, da je tedaj funkcija $F$ zvezno odvedljiva ter izračunaj odvod $F'(y)$.

b) Za $y > 1$ zamenjaj vrstni red integracije v integralu, ki določa funkcijo $F$.

REŠITEV:

a)[15] Odvajamo po pravilu

$$\frac{d}{dy}\left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx\right) = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(v(y),y)v'(y) - f(u(y),y)u'(y)$$

in dobimo

$$F'(y) = \int_y^{y^2} dx \left(\int_{y-x}^{y} 3g'(y^3 t)y^2 t dt + g(y^4) - g(y^4 - y^3 x)\right) +$$

$$+2y \int_{y-y^2}^{y} g(y^3 t)dt - \int_0^y g(y^3 t)dt.$$

Ker so vse meje integralov in podintegralske funkcije zvezne, je $F$ res zvezno odvedljiva.

b)[10] Lik, ki ga v ravnini $(x,t)$ določajo meje integrala $F(y)$ je omejen s premicami $x = y$, $x = y^2$, $t = y$ in $t = y - x$, od koder dobimo

$$F(y) = \int_{y-y^2}^{0} dt \int_{y-t}^{y^2} g(y^3 t)dx + \int_0^y dt \int_y^{y^2} g(y^3 t)dx.$$

2. a) Prepričaj se, da za $x \neq 0$ velja

$$\frac{1-\cos x}{x} = \int_0^1 \sin xy dy.$$

b) Za $a > 0$ izračunaj integral

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{1-\cos x}{x} dx.$$

Rešitev:

a) [1]

$$\int_0^1 \sin xy dy = \left[\frac{-\cos xy}{x}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1-\cos x}{x}.$$

b) [24] Integral $I(a)$ lahko zapišemo v obliki

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-ax} dx \int_0^1 \sin xy dy.$$

Ker velja $|e^{-ax} \sin xy| \leq e^{-ax}$ in integral $\int_0^\infty e^{-ax} dx$ obstaja, integral $\int_0^\infty e^{-ax} \sin xy dx$ enakomerno konvergira na intervalu $[0, 1]$. Od tod sledi, da lahko vrstni red integracije zamenjamo in dobimo

$$I(a) = \int_0^1 dy \int_0^\infty e^{-ax} \sin xy dx.$$

S pomočjo integracije po delih računamo

$$J(y) = \int_0^\infty e^{-ax} \sin xy dx = \left[\frac{e^{-ax}}{-a} \sin xy\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{a} y \cos xy dx =$$

$$= \frac{y}{a}\left(\left[\frac{e^{-ax}}{-a} \cos xy\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{a} y \sin xy dx\right) = \frac{y}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} J(y),$$

torej je $J(y) = \frac{y}{y^2+a^2}$. Od tod dobimo

$$I(a) = \int_0^1 \frac{y}{y^2+a^2} dy = \frac{1}{2}\left[\log(y^2+a^2)\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} \log \frac{1+a^2}{a^2}.$$

3. Naj bo $a > 0$ in $D$ homogeno telo, ki ga določata pogoja

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 \le a^2(x^2 + y^2)^2$$

in $z \ge 0$. Določi težišče telesa $D$.

REŠITEV:

Ker je telo $D$ simetrično okrog osi $z$, sta abscisa in ordinata težišča enaki $x_T = y_T = 0$. Koordinato $z_T$ izračunamo po formuli

$$z_T = \frac{\int_D z dV}{V(D)}.$$

Telo opišemo v sferičnih koordinatah in dobimo pogoja $r^6 \le a^2 r^4 \cos^4 \vartheta$, ter $\vartheta \ge 0$. Prvi pogoj preide v $r \le a \cos^2 \vartheta$, zato je prostornina telesa $D$ enaka

$$V(D) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^a \cos^2 \vartheta r^2 \cos \vartheta dr = \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^7 \vartheta d\vartheta =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} \frac{1}{2} B(4, 1/2) = \frac{\pi a^3}{3} \frac{\Gamma(4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(9/2)} =$$

$$= \frac{\pi a^3 \cdot 3!\Gamma(1/2)}{3(7/2)(5/2)(3/2)(1/2)\Gamma(1/2)} = \frac{32\pi a^3}{7 \cdot 5 \cdot 3}.$$

Integral $\int_D z dV$ izračunamo kot

$$\int_D z dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^a \cos^2 \vartheta r \sin \vartheta r^2 \cos \vartheta dr = \frac{2\pi a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos^9 \vartheta d\vartheta =$$

$$= \frac{\pi a^4}{2} \int_0^1 u^9 du = \frac{\pi a^4}{20}.$$

Sledi

$$z_T = \frac{\pi a^4}{20} \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{32\pi a^3} = \frac{21a}{128}.$$

4. Naj bodo $a, b, c, P, Q, R > 0$ in $D$ območje, ki ga od prvega oktanta $x, y, z \geq 0$ odreže ploskev z enačbo

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1/P} + \left(\frac{y}{b}\right)^{1/Q} + \left(\frac{z}{c}\right)^{1/R} = 1.$$

Dokaži, da je prostornina območja $D$ enaka

$$V(D) = abc \cdot \frac{\Gamma\left(1+P\right)\Gamma\left(1+Q\right)\Gamma\left(1+R\right)}{\Gamma\left(1+P+Q+R\right)}.$$

Nasvet: Nalogo rešite z uvedbo primerno 'deformiranih' sferičnih koordinat.

Rešitev:

Ker sferične koordinate izhajajo iz enačbe $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, jim 'podtaknemo' take potence, da dana enačba preide v to značilno enačbo za sferične koordinate. Definiramo:

$$x = ar^{2P} \cos^{2P} \vartheta \cos^{2P} \varphi$$

$$y = br^{2Q} \cos^{2Q} \vartheta \sin^{2Q} \varphi$$

$$z = cr^{2R} \sin^{2R} \vartheta$$

Tedaj pogoji, ki določajo območje $D$, preidejo v pogoje $\varphi, \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ in $r \in [0, 1]$. Z nekaj truda izračunamo Jacobijevo determinanto

$$\det JF = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_\vartheta \\ y_r & y_\varphi & y_\vartheta \\ z_r & z_\varphi & z_\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$8PQR \cdot abc \cdot r^{2P+2Q+2R-1} \cdot \cos^{2P-1} \varphi \cdot \sin^{2Q-1} \varphi \cdot \cos^{2P+2Q-1} \cdot \vartheta \sin^{2R-1} \vartheta,$$

od koder dobimo

$$V(D) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 |\det JF| dr =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2P-1} \varphi \cdot \sin^{2Q-1} \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^{2P+2Q-1} \cdot \vartheta \sin^{2R-1} \vartheta d\vartheta \int_0^1 8PQR \cdot abc \cdot r^{2P+2Q+2R-1} dr =$$

$$= \frac{1}{2} B(P, Q) \frac{1}{2} B(P+Q, R) \frac{8PQR \cdot abc}{2P + 2Q + 2R} = \frac{PQR \cdot abc \cdot \Gamma(P)\Gamma(Q)\Gamma(P+Q)\Gamma(R)}{(P+Q+R)\Gamma(P+Q)\Gamma(P+Q+R)} =$$

$$= \frac{abc\Gamma(1+P)\Gamma(1+Q)\Gamma(1+R)}{\Gamma(1+P+Q+R)}.$$