

Fourierova analiza

1. Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ 2x & ; \quad 0 < x \leq \pi \end{cases} .$$

Razvij funkcijo f v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ in se prepričaj, da dobljena vrsta povsod konvergira proti funkciji $g(x)$. Nato skiciraj še graf funkcije $g(x)$.

2. Razvij funkcijo $f(x) = |x|$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ in seštej vrsto $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$
3. Razvij funkcijo $f(x) = \max(\cos x, 1)$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ in seštej vrsti

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \text{ in } S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} .$$

4. Naj bo $f(x) = x^2$ za $x \in [0, \pi]$. Razvij funkcijo f
- a) v Fourierovo vrsto na intervalu $[0, \pi]$ ter skiciraj graf vsote vrste za vse $x \in \mathbf{R}$.
- b) v kosinusno Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ ter skiciraj graf vsote vrste za vse $x \in \mathbf{R}$.
- c) v sinusno Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ ter skiciraj graf vsote vrste za vse $x \in \mathbf{R}$.
5. Razvij $f(x) = x(\pi - x)$ v sinusno Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ in seštej vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$.
6. a) Razvij $f(x) = \cos x$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ter skiciraj graf vsote vrste za vse $x \in \mathbf{R}$.
- b) Razvij funkcijo $f(x) = \sin^3 x$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.
7. Prepričaj se, da za vsak $x \in [-\pi, \pi]$ velja

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

in nato s pomočjo Parsevalove enakosti seštej vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} .$$

8. Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; |x| > 1 \end{cases}$$

karacteristična funkcija intervala $[-1, 1]$ in

$$h(x) = \begin{cases} 2 - |x| & ; -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; |x| > 2 \end{cases} .$$

a) Dokaži, da velja $h = f * f$.

b) Določi Fourierovo transformacijo $F(h)$ funkcije h .

9. Za $a, b > 0$ določi $f_a * f_b$, pri čemer za $c > 0$ označimo $f_c(x) = e^{-cx^2}$.

10. S pomočjo Fourierove transformacije reši diferencialno enačbo

$$t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

pri začetnem pogoju $u(x, 0) = f(x)$.

11. Transformiraj diferencialno enačbo

$$xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0$$

s Fourierovo transformacijo.

12. S pomočjo Parsevalove enakosti za Fourierovo transformacijo izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2} dy$$