Funkcije več spremenljivk

1. Za naslednje funkcije dveh spremenljivk s pomočjo nivojnic skiciraj njihove grafe.

   a) $f(x,y) = 1 - x - y$

   b) $f(x,y) = y^2$

   c) $f(x,y) = x^2 + y^2$

   d) $f(x,y) = x^2 - y^2$

2. Določi definicijsko območje funkcije $f(x,y) = \log(y^2 - 4x + 8)$ in skiciraj njen graf.

3. Nariši 'zemljevid' ploskve $z = y(x^2 - 1)$ in poišči kako pot od točke $A(-2,1,3)$ do točke $B(2,-1,-3)$, ki se nikjer ne vzpenja.

4. a) Obravnavaj zveznost funkcije, podane s predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   b) Za funkcijo, podano s predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & ; \quad y = x^2, x \neq 0 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

   pokaži, da so vse radialne limite v izhodišču enake $f(0,0)$, funkcija f pa ni zvezna v $(0,0)$.

5. Obravnavaj zveznost funkcije, podane s predpisom

   a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ d & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ d & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. Obravnavaj zveznost in parcialno odvedljivost funkcije, podane s predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} y\log(x + \sqrt{x^2+y^2}) & ; \quad \text{kjer je izraz definiran} \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

7. a) Ali je funkcija $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ diferenciabilna?
   b) Določi parameter d tako, da bo funkcija

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; \quad (x,y)\neq(0,0) \\ d & ; \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

   zvezna in obravnavaj njeno diferenciabilnost.

8. Določi parameter d tako, da bo funkcija

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0) \\ d & ; \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

   zvezna ter obravnavaj njeno parcialno odvedljivost in diferenciabilnost.

9. Za funkcijo

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

   izračunaj odvoda $\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(0,0)$ in $\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)(0,0)$. Kaj lahko iz tega zaključiš?

10. S pomočjo diferenciala približno izračunaj $\ln(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1)$.

11. Funkcijo $f(x)=(1+x)^{1-x}$ zapiši kot kompozitum preslikav $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ in $h:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ in s pomočjo verižnega pravila določi odvod $f'(x)$.

12. V *valovno enačbo*

$$u_{xx}=\frac{1}{c^2}u_{tt}$$

   vpelji novi spremenljivki $y=x+ct$ in $z=x-ct$ ter poišči njene rešitve.

13. Za dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo $u(x,y)$ definiramo

$$\triangle u=u_{xx}+u_{yy}.$$

   Prevedi *Laplace-ov operator* $\triangle$ v polarne koordinate.

14. Dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $u(x,y)$ se imenuje *harmonična funkcija*, če velja

$$\triangle u=0.$$

   Poišči harmonične funkcije, ki imajo konskantno vrednost na vsaki krožnici s središčem v izhodišču.

15. Dan je izraz

$$I=xz_x+yz_y.$$

   a) Prevedi izraz I v polarne koordinate.

   b) V izraz I vstavi $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$

   c) Komentiraj rezultat iz točke c).

16. V izraz $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ vpelji novi neodvisni spremenljivki u in v, za kateri velja $x = uv$ ter $y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$.

17. Naj bo $z = z(x, y)$. V izraz
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
vpelji novi spremenljivki s in t, za kateri velja $x = e^s \cos t$ in $y = e^s \sin t$.

18. Naj bo $D \subset \mathbf{R}^n$ odprta množica in $f : D \to \mathbf{R}$ funkcija, ki je na D parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah, njeni parcialni odvodi pa omejeni na D. Dokaži, da je f zvezna.

19. Naj bosta $f, g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ zvezni funkciji in $a \in \mathbf{R}^n$. Dokaži:

    Če je funkcija g diferenciabilna v točki a in velja $g(a) = 0$, je produkt funkcij fg diferenciabilen v točki a.