

### Integrali s parametrom

1. Izračunaj limito

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{y+1} \frac{dx}{1+x^2+y^2}.$$

2. Za  $a > 1$  izračunaj integral

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \log(a^2 - \sin^2 \varphi) d\varphi.$$

3. Naj bo  $0 < a < b$ . Izračunaj integral

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx.$$

NASVET: Integral zapiši v obliki  $\int_0^1 dx \int_a^b f(x, y) dy$ .

4. Naj bo  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  strogo pozitivna zvezna funkcija. Ugotovi ali je funkcija

$$I(m) = \int_0^1 \frac{mf(x)}{x^2 + m^2} dx$$

zvezna na vsem svojem definicijskem območju.

5. Naj bo funkcija  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  zvezno odvedljiva. Prepričaj se, da integral

$$I(x) = \int_0^x (x+y)f(y) dy$$

predstavlja dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo in določi  $I''$ .

6. Ugotovi ali je integral  $I(a)$  enakomerno konvergenten.

a)  $I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx$  za  $a \geq 0$

b)  $I(a) = \int_0^\infty e^{-ax} dx$  za  $a > 0$

7. Za  $r \in \mathbf{R}$  izračunaj integral

$$I(r) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} rx}{x(1+x^2)} dx.$$

8. Za realno število  $a > 0$  in naravno število  $n$  izračunaj integral

$$I_n(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

9. Naj bosta  $a, b > 0$ . Izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx.$$

10. Dana je funkcija

$$f(a) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 + a^2 x^2)}{x^2 + 4} dx.$$

- Dokaži, da je funkcija  $f$  zvezna na  $\mathbf{R}$ .
- Dokaži, da je  $f$  zvezno odvedljiva na intervalu  $(c, d)$ , če  $0 \notin (c, d)$ .
- Izračunaj  $f'$  in  $f$ .

11. Za  $a, b > 0$  definiramo integral

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2}.$$

Izračunaj  $I(a, b)$ , če veš, da velja

$$J(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}.$$

12. Za  $a > 0$  izračunaj integral

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx.$$

13. Naj bo  $n$  naravno število. Izračunaj integral

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx.$$

14. Naj bo

$$\phi(m) = \int_0^{\infty} e^{-x^m} dx.$$

- Določi definicijsko območje funkcije  $\phi$ .
- Izračunaj limito  $\lim_{m \rightarrow \infty} \phi(m)$ .
- Za naravno število  $m$  izračunaj  $\phi(\frac{1}{m})$ .

15. a) S pomočjo Eulerjeve funkcije  $B$  izrazi integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} x \cos^{2q-1} x dx.$$

- Izračunaj integral  $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x dx$ .
- Ugotovi za katere  $c \in \mathbf{R}$  obstaja integral

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^c x dx$$

in ga izračunaj.

16. Naj bo  $m > n + 1 > 0$ . S pomočjo Eulerjeve funkcije  $B$  izrazi integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{1+x^m} dx$$

in ga izračunaj.

17. Z Eulerjevima funkcijama  $\Gamma$  ali  $B$  izrazi integrale:

a)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ .

b)  $\int_0^{\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx$  za  $a > 0$  in  $p > -1$ .

c)  $\int_0^{\infty} \frac{x^a \ln x}{1+x^2} dx$  za  $-1 < a < 1$ .

18. Dani sta funkciji

$$F(x) = \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$$

in

$$G(x) = - \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt.$$

a) Dokaži, da velja  $F(x) = \frac{\pi}{4} + G(x)$ .

b) Izračunaj integral  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ .