Izrek o implicitni funkciji in ekstremi funkcij več spremenljivk

1. Dana je preslikava $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, kjer je $F(x,y) = (x^3y+1, x^2+y^2)$. Določi točke v katerih je F lokalni C^∞-difeomorfizem. Oglej si geometrično podobo dogajanja v okolici točke $(a, \frac{a}{\sqrt{3}})$.

2. a) Naj bo $F(x,y) = (xy\sin(x^2+y^2), x^2+y^2)$. Določi množico točk, v katerih preslikava F ni lokalni C^∞-difeomorfizem.

   b) Naj bo $F(x,y,z) = (x^3+y^3-3xyz,\ \sin\pi xyz,\ z^2)$. Določi množico točk, v katerih preslikava F ni lokalni C^∞-difeomorfizem. Skiciraj preseka te množice z ravninama $z=0$ in $z=1$.

3. Dokaži, da enačbi $4xy+2xz+4y-3z=0$ in $xy+xz+yz+2x+2y-2z=0$ v okolici točke $x=0$ določata C^∞-funkciji $y=y(x)$ in $z=z(x)$ ter določi odvoda $y'(0)$ in $z'(0)$.

4. Pokaži, da enačba $\sin xy + \sin xz + z\sin yz = 0$ v okolici točke $(0,1)$ določa neskončno takih C^∞-funkcij $z=z(x,y)$, da je $z(0,1)\neq 0$. Za funkciji z_1 in z_2, ki zadoščata pogojema $z_1(0,1)=2\pi$ in $z_2(0,1)=-2\pi$ določi Jacobijevo matriko $\left(\frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(x,y)}\right)(0,1)$.

5. Pokaži, da enačba $ze^z = xe^x + ye^y$ enolično določa C^∞-funkcijo $z = z(x,y)$, ki je definirana na odprtem prvem kvadrantu.

6. Naj bo $a>0$. Ali enačba $(x^2+y^2)^{3/2} - 2ax^2 = 0$ določa podmnogoterost v $\mathbf{R}^2$?

7. Za dane funkcije $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ ugotovi ali je $f^{-1}(0)$ podmnogoterost.

   a) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^3 - a^2(x^2+y^2)^2$, $a>0$

   b) $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

   c) $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1$

8. Dana je preslikava s predpisom $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z-4, z-y^2)$.

   a) Ali je $F^{-1}(0,0)$ podmnogoterost?

   b) Za katere $a,b\in\mathbf{R}$ je $F^{-1}(a,b)$ podmnogoterost?

9. Prepričaj se, da enačba $z^3+yz-xy^2-x^3=0$ v okolici točke $(1,1)$ določa C^∞-funkcijo $z=z(x,y)$ in to funkcijo razvij v Taylorjevo vrsto do členov reda 2.

10. S pomočjo razvoja ustrezno izbrane funkcije f v Taylorjevo vrsto do členov reda 3 približno izračunaj $1,1^{1,02}$.

11. a) S pomočjo razvoja izraza $f(x,y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$ v Taylorjevo vrsto določi odvod $\left(\frac{\partial^{2009} f}{\partial x^{1009}\partial y^{1000}}\right)(0,0)$

    b) Funkcijo $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$ razvij v Taylorjevo vrsto okrog $(0,0)$.

12. Naj bo $f(x,y) = \sqrt{x+y-xy}$. Določi odvoda $\left(\frac{\partial^{100} f}{\partial x^{50} \partial y^{50}}\right)(1,1)$ in $\left(\frac{\partial^{100} f}{\partial x^{48} \partial y^{52}}\right)(1,1)$

13. Naj bo $f(x,y,z) = 2x + (1+y)^2 \sin(x+y+z)$.

    a) Razvij funkcijo f okrog točke $(0,0,0)$ do členov reda 3 in približno izračunaj $0,2 + 1,1^2 \sin(0,3)$.

    b) Koliko odvodov bi morali izračunati za oceno napake približka iz točke a)?

14. Poišči in klasificiraj vse lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

15. Poišči in klasificiraj vse lokalne ekstreme funkcije $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

16. Prepričaj se, da ima funkcija $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$ neskončno lokalnih maksimumov in nobenega lokalnega minimuma.

17. Med trikotniki, včrtanimi v dano krožnico, poišči take, ki imajo največjo možno ploščino.

18. Iz kosa pločevine z dolžino h in širino d naredimo žleb, tako da vzdolž danega kosa na vsaki strani za isti kot φ zapognemo enako široka dela širine l (oblika prereza takega žleba je tako enakokraki trapez). Izberi količini φ in l tako, da bo dobljeni žleb 'držal' čim večjo količino vode.

19. Med kvadri s površino 10 določi tiste, ki imajo najčjo možno prostornino.

20. Določi največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ na zaprtem krogu $\overline{K}((0,0),2)$.