Domače naloge iz ANALIZE II

1. Dokaži, da lahko funkcijo $f(x,y) = \frac{\sin x^3}{x^2+y^2}$ razširimo do povsod definirane zvezne funkcije g in ugotovi kje je funkcija g diferenciabilna in kje zvezno odvedljiva.

2. Dana je funkcija
$$g(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{1-xy}{x^2+y^2}.$$
(a) Dokaži, da ima funkcija g natančno določeno zvezno razširitev $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.
(b) Obravnavaj diferenciabilnost funkcije f.

3. Naj bo realna funkcija $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dana s predpisom
$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x^2/y} & ; \quad y \neq 0 \\ 0 & ; \quad y = 0 \end{cases}.$$
Ugotovi, kje je funkcija f zvezna, kje obstajata parcialna odvoda in kje je diferenciabilna. Ugotovi še, ali je zožitev funkcije f na zaprto zgornjo polravnino zvezna.

4. Označimo $D = \{(x,x) \mid x \in \mathbf{R}\}$. Naj bo dana preslikava $F : (\mathbf{R}^2 \setminus D) \to \mathbf{R}$ s predpisom
$$F(x,y) = \frac{e^x - e^y}{x-y}.$$
Razširi preslikavo F do zvezne preslikave $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Ali je preslikava G zvezno diferenciabilna?

5. Razširi funkcijo, podano s predpisom
$$f(x,y) = \frac{\sin x^2 \sin y}{x^2+y^2}$$
razširi do povsod definirane zvezne funkcije in ugotovi, ali je tako dobljena funkcija diferenciabilna.

6. Dani sta množici
$$F = \{(-1,0),(1,0)\} \qquad \text{in} \qquad G = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x^2+y^2 = 1\}.$$
Naj bo $f(x,y)$ kvadrat razdalje od točke (x,y) do množice F, $g(x,y)$ pa kvadrat razdalje od točke (x,y) do množice G. Za funkciji f in g ter ugotovi, v katerih točkah sta parcialno odvedljivi in kje diferenciabilni.

7. Dana je funkcija $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,
$$f((x,y)) = (d((x,y),[-1,1] \times \{0\}))^2.$$
Obravnavaj zveznost in diferenciabilnost funkcije f.

8. Naj bo u dvakrat zvezno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk.

   Prevedi izraz $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ v polarne koordinate.

9. Pokaži, da enačba
$$x^2 + y^2 + z^2 - e^z = 0$$
   v okolici točke $(1,0)$ določa natanko eno C^∞-funkcijo $z = z(x,y)$

10. Dokaži, da enačba $x^2 + y^2 + z^2 - e^z = 0$ v okolici točke $(1,0,0)$ določa natanko eno C^∞-funkcijo $z = f(x,y)$. Določi Taylorjev polinom druge stopnje za funkcijo f v okolici točke $(1,0)$.

11. Pokaži, da enačba $x^2 + xy + 3y^2 + \frac{z^2}{2} - e^z = 0$ v okolici točke $(1,0)$ določa natanko eno C^∞-funkcijo $z = z(x,y)$ in jo razvij v Taylorjevo vrsto do členov reda 2.

12. Dokaži, da enačbi $x + y + z = 0$ in $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ določata gladko mnogoterost M. V katerih točkah je M lokalno graf neke preslikave $(x,y) = (x(z), y(z))$?

13. Dana je funkcija $f(x,y) = ye^{x^3+y^2}$. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto določi parcialna odvoda $\frac{\partial^{57} f}{\partial x^{42} \partial y^{15}}(0,0)$ in $\frac{\partial^{22} f}{\partial x^{11} \partial y^{11}}(0,0)$.

14. Naj bo $f(x,y) = \frac{1}{1-xy} e^{x^2 y^3}$. Določi parcialna odvoda $\frac{\partial^{30} f}{\partial x^{17} \partial y^{13}}(0,0)$ in $\frac{\partial^{61} f}{\partial x^{25} \partial y^{36}}(0,0)$.