Nakaj dodatnih nalog za 2. kolokvij iz ANALIZE IIa

1. Določi globalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 - 3y^2$ na množici $A = \{(x,y) \mid (x^2+y^2)^2 \leq 4(x^2-y^2)\} \subset \mathbf{R}^2$.

2. Poišči globalne ekstreme funkcije $\sin\frac{\pi xy}{3}$ na krogu $x^2+y^2 \leq 1$.

3. Poišči točke na elipsoidu
$$\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1,$$
ki so najbolj oddaljene od ravnine $3x + 4y + 12z = 288$.

4. Določi minimalno in maksimalno vrednost izraza xyz pri pogojih $6x + 3y + 2z = 0$ in $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

5. Število 12 razcepi na vsoto pozitivnih števil x, y, z, tako da bo imel izraz x^2yz^2 največjo možno vrednost.

6. Naj bo a stacionarna točka dvakrat zvezno odvedljive funkcije $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Dokaži: Če je $\det Hf(a) \neq 0$, je a izolirana stacionarna točka funkcije f. (To pomeni, da v neki okolici točke a ni stacionarnih točk, različnih od a.)
Nasvet: Za stacionarno točko oblike $a+h$ zapiši $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+h)$ po Taylorjevi formuli za vse $i = 1, 2, \ldots, n$.

7. Dokaži, da enačbi $x + y + z = 0$ in $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ določata gladko mnogoterost M, ter poišči ekstreme izraza $4x + 6y - 7z$ na M.

8. Dana je točka $A(1,2,3) \in \mathbf{R}^3$. Skozi točko A poteka ravnina, ki skupaj s koordinatnimi ravninami določa tetraeder v prvem oktantu. Kolikšen je najmanjši možen volumen takega tetraedra?

9. Naj bo $a > 0$. Izračunaj integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + \cos^2 x)dx$.

10. Naj bo $|a| < 1$. Izračunaj integral $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \ln\left(\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\right) dx$.

11. Izračunaj integral $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-x}}{x} \cos x dx$, za poljubno realno število $a > 0$.

12. Izračunaj integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{xe^x} dx$, za poljubno realno število a.

13. Za vsak $a \in \mathbf{R}$ izračunaj integral $I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx$.

14. Izračunaj integral $I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{e^x x^2} dx$.
Pomoč: $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b \sin bx)$

15. Naj bo a realno število in $f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\cos^2 t} dt$. Izračunaj integral $\int_0^{\infty} e^{-a} f(a) da$.

16. S pomočjo funkcije f, $f(x,t) = x^{-2}e^{-x}\sin^2 tx$ izračunaj $\int_0^\infty \frac{\sin^2(x/2)}{e^x x^2}dx$. Vse korake natančno utemelji!

17. Definirajmo funkcijo $J_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s predpisom $J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin\theta)\,d\theta$. Naj bo $a > 0$. Izračunaj integral $\int_0^\infty e^{-ax}J_0(x)\,dx$.

18. Naj bo $0 < a < b$. Za naravno število n izračunaj integral $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^n} - e^{-bx^n}}{x}dx$.

19. Naj bo $r > 0$. Določi območje v ravnini (p,q), na katerem konvergira integral $\int_1^\infty (x^r - 1)^p x^{-q} dx$ in ga izračunaj.

20. Naj bo $f(t) = \frac{t}{\Gamma(1-t)}\int_0^1 (x^{t-1}(1-x)^{2-t} - x^{t+1}(1-x)^{-t})dx$. Določi definicijsko območje funkcije f in izračunaj limito $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$.

21. Naj bo $x > 0$.

    a) Dokaži, da je $B(x,x) = 2\int_0^{1/2}(t-t^2)^{x-1}dt$.

    b) S pomočjo substitucije $t = \frac{1}{2}(1-\sqrt{u})$ dokaži, da velja $B(x,x) = 2^{1-2x}B(\frac{1}{2},x)$.

    c) Dokaži enakost $\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\Gamma(2x)$.

22. Razvij funkcijo $f(x) = \sin ax$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi,\pi]$ in nato seštej vrsto
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}.$$

23. Izračunaj prostornino območja $D \subset \mathbf{R}^3$, omejenega s ploskvami $z = \ln x$, $z = \ln y$, $x + y = 2e$ in $z = 0$.

24. Dan je trojni integral $I = \int_0^1 dy \int_{1-y}^{2-2y} dz \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx$. Integral zapiši v obliki $I = \int_\cdot^\cdot dx \int_\cdot^\cdot dy \int_\cdot^\cdot dz$ in ga izračunaj.

25. Izračunaj volumen območja, omejenega s ploskvama $x^2 + z^2 = b^2$, $x^2 - y^2 - z^2 = 0$, kjer je $x > 0$. Pomagaš si lahko s cilindričnimi koordinatami in formulo $\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}t\cos^{2q-1}t\,dt = \frac{1}{2}B(p,q)$.

26. Naj bodo $a,b,c > 0$. Izračunaj volumen telesa, omejenega s ploskvijo $(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} + (z/c)^{2/3} = 1$.

27. Naj bo $a > 0$. Izračunaj volumen območja, ki ga omejujeta ploskvi z enačbama $2x^2 + z^2 = 4ax$ in $2y^2 + z^2 = 2a^2$.

28. Naj bo $R > a > 0$ in T **poln** torus, ki ga opiše krog $(x-R)^2 + z^2 < a$ v ravnini $y = 0$, če ga zavrtimo okoli osi z. V točki $(0,0,h)$ se nahaja točkasto telo z maso M. Izračunaj privlačno silo med torusom in tem telesom, če je gostota torusa podana s predpisom $\rho(x,y,z) = ((h-z)^2 + x^2 + y^2)^{3/2}$. NASVETA: Najprej 'po fizikalno' utemelji, da bo sila delovala

v smeri osi z. Privlačna sila med točkastima telesoma z masama m_1 ter m_2 na razdalji d se izračuna po formuli $F = \frac{km_1m_2}{d^2}$, kjer je k gravitacijska konstanta.

29. Naj bodo (r, φ, ϑ) sferične koordinate v prostoru in T homogeno telo omejeno s ploskvijo $r^3 = \sin^2 \vartheta$. Izračunaj vztrajnostni moment telesa T okrog osi z.

30. Izračunaj volumen območja $D \subset \mathbf{R}^n$ danega z relacijami $x_1 + \ldots + x_{n-3} = 1$, $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, $x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq x_1^2$.

31. Naj bo $a > 0$. Izračunaj vztrajnostni moment telesa omejenega s ploskvama $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - ax = 0$, s konstantno gostoto ρ, pri zavrtitvi okoli osi z.

32. Naj bo $R > 0$ in homogeno telo $T \subset \mathbf{R}^3$ dano z relacijami $x^2 + y^2 \leq Rx$, $x + z \leq R$ ter $z \geq 0$. Izračunaj težišče telesa T.
Pomoč: $\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} x \sin^{2q-1} x \, dx = \frac{1}{2} B(p, q)$.

33. Dana je homogena krogla s polmerom $a > 0$ in maso m. Izračunaj vztrajnostni moment krogle okrog premice, tangentne na to kroglo.

34. Dano je homogeno telo $D \subset \mathbf{R}^3$, $D = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\}$. Določi težišče telesa D.

35. Naj bo D območje v prostoru, ki ga omejuje ploskev z enačbo $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 y$, $a > 0$. Izračunaj prostornino območja D.

36. Izračunaj prostornino telesa, določenega z neenakostmi $|y| \geq x$, $x^2 + y^2 \leq 4$, $z^2 - x^2 - y^2 \leq 4(z - 1)$.

37. Naj bo $0 < r < R$ in $h > 0$. Določi težišče telesa, ki ga omejujejo ploskve $x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 + y^2 = R^2$, $\frac{y}{R} + \frac{2z}{h} = 1$ in $z = 0$.

38. Izračunaj volumen območja, omejenega s ploskvama $x^2 + z^2 = b^2$, $x^2 - y^2 - z^2 = 0$, kjer je $x > 0$. Pomagaš si lahko s cilindričnimi koordinatami in formulo $\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t \, dt = \frac{1}{2} B(p, q)$.