

Riemannov integral

1. Integriraj funkcijo $f(x, y) = e^{x+y}$ po trikotniku D s oglišči $(0, 0)$, $(1, 0)$ in $(1, 1)$
2. Zamenjaj vrstni red integracije v integralu

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^1 f(x, y) dy.$$

3. Določi meje za integracijo po valju, določenem z zvezama $x^2 + y^2 \leq a^2$ in $z \in [0, h]$.

4. Izračunaj integral

$$\int_A \frac{dV}{(x + y + z + 1)^3},$$

kjer je A tetraeder z oglišči $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ in $(0, 0, 1)$.

5. Naj bo $a > 0$. Izračunaj prostornino območja $S_n(a) \subset \mathbf{R}^n$, kjer je

$$S_n(a) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq a\}.$$

6. Izračunaj prostornino telesa, ki ga omejujejo ploskve $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$ in $x + z = 6$.

7. Izračunaj prostornino telesa, ki ga omejujejo ploskve $x + y + z = 1$, $z = xy$ in $z = 0$.

8. Naj bo $a > 0$. V integral

$$\int_D \sin(x + y) \cos \frac{2ay}{x + y} dx dy,$$

kjer je $D = \{(x, y) \mid x, y \geq 0, a \leq x + y \leq 2a\}$, vpelji spremenljivki $u = x + y$ in $v = \frac{2ay}{x+y}$ ter ga izračunaj.

9. Naj bo $R > 0$. Izračunaj prostornino območja, ki ga omejujejo ploskve

a) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ in $x^2 + y^2 = Rx$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ in $z^2 = x^2 + y^2$.

10. Naj bo $a > 0$ in D območje v ravnini, ki ga omejuje desni del zanke $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Izračunaj integral

$$\int_D \frac{xdxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

11. Izračunaj prostornino območja, ki ga omejujejo ploskve

a) $x^2 + y^2 = z$ in $xy = z^2$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ in $x^2 + y^2 = z^2$.

12. Naj bo $a > 0$. Izračunaj prostornino območja, ki ga omejuje ploskev

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2.$$

13. Vpelji primerne torusne koordinate in izračunaj prostornino torusa s polmeroma a in R , kjer je $0 < a < R$.

14. a) Izračunaj vztrajnostni moment homogenega torusa z maso m in polmeroma $0 < a < R$.

b) Naj bo T torus s polmeroma a in R ter osjo z . Določi težišče tistega dela torusa T , ki leži v območju $x, y \geq 0$.

15. Izračunaj posplošene integrale

a)

$$\int_{\mathbf{R}^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV.$$

b)

$$\int_{K(0,R) \setminus \{0\}} \log(x^2 + y^2 + z^2) dV,$$

za $R > 0$.

c)

$$\int_{[0,\infty)^3} \frac{dV}{(1+x+y+z)^{7/2}}.$$

16. Ugotovi za katere $p, q, r > 0$ obstaja integral

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{x^p y^q z^r}$$

in ga tedaj izračunaj.

17. Točkasto telo z maso m_0 je od homogene ravnine s površinsko gostoto ρ oddaljeno za $h > 0$. Izračunaj gravitacijsko silo med točkastim telesom in ravnino.

18. Naj bo $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ zvezna funkcija. Dokaži, da velja

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

19. Zapiši sferične koordinate v prostoru \mathbf{R}^n in izračunaj prostornino enotske krogle.