Analiza 2b

1. kolokvij

25. 4. 2014

									Σ	

Ime in priimek ______________________________ Vpisna številka

Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$.

Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

$\boxed{\text{P}}$ Če je $D \subset \mathbb{R}^3$ omejeno območje s kosoma gladkim robom in $\vec{f}(x,y,z) = (2x, -3y, z)$, je pretok polja $\vec{f}$ skozi ploskev ∂D enak 0.

$\boxed{\text{P}}$ Za dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ velja $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0$.

$\boxed{\text{P}}$ Realni del holomorfne funkcije je harmonična funkcija.

$\boxed{\text{N}}$ Če je f holomorfna funkcija in $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, kjer sta u in v realni funkciji, velja $u_y = v_x$.

$\boxed{\text{N}}$ Če je $\vec{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ zvezno odvedljiva preslikava, je njena slika $K = \vec{r}([0,1])$ gladek lok.

$\boxed{\text{P}}$ Če je $\vec{r}(s)$ parametrizacija krivulje K z naravnim parametrom s, velja $\|\vec{r}\,'(s)\| = 1$.

$\boxed{\text{N}}$ Ploskovni integral skalarnega polja je odvisen od izbire orientacije ploskve.

$\boxed{\text{N}}$ Za gladki funkciji P in Q ter $D \subset \mathbb{R}^2$ območje z gladkim robom velja $\int_{\partial D} Q dx + P dy = \int_D (Q_x - P_y) dx dy$.

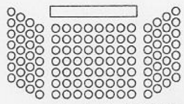
$\boxed{\text{N}}$ Če je $D \subset \mathbb{R}^3$ odprta množica in za vektorsko polje $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ velja $\operatorname{rot} \vec{f} = 0$ povsod na D, je $\vec{f}$ potencialno polje.

$\boxed{\text{P}}$ Če vsota $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira za $x \in (1,2)$, je funkcija $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ holomorfna na krogu $K(0,2)$.

1. kolokvij iz Analize 2b

25. 4. 2014

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 100 točk.
Veliko uspeha!



Sedež (2.05)

1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek

Vpisna številka

2. naloga

Naj bo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, vektorsko polje $\vec{R}$ pa podano s predpisom

$$\vec{R}(x, y, z) = (f(r), f(r), f(r)),$$

kjer je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Naj bo Π ravnina z enačbo $x + y + z = 2014$.

a) Za katere funkcije f je polje $\vec{R}$ potencialno?

b) Naj bo $K \subset \Pi$ gladka krivulja med točkama $A(2014, 0, 0)$ in $B(0, 0, 2014)$. Dokaži, da je pri poljubno izbrani funkciji f integral $I(K) = \int_K \vec{R} d\vec{r}$ neodvisen od izbire poti K in ga izračunaj.

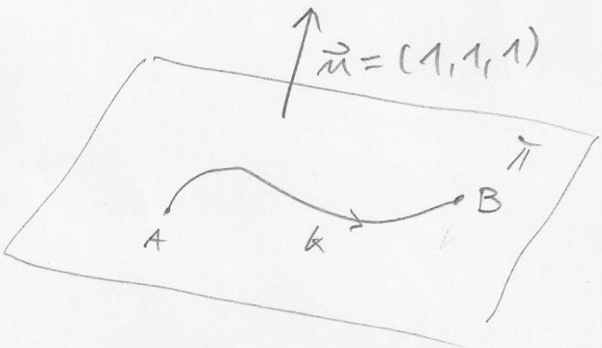
10 a) Če je $\vec{R}$ potencialno $\Longrightarrow$ rot $\vec{R} = 0$

rot $\vec{R} = \nabla \times (f(r), f(r), f(r)) = f'(r)\left(\frac{y-z}{r}, \frac{z-x}{r}, \frac{x-y}{r}\right) = 0$

$\Longleftrightarrow f'(r) = 0 \Longleftrightarrow$ f je konstantna na $[0, \infty)$

Če je $f \equiv C$ konstantna na $[0, \infty) \Longrightarrow \vec{R} = (C, C, C) =$
$= \text{grad}\left(C(x+y+z)\right)$

10 b)

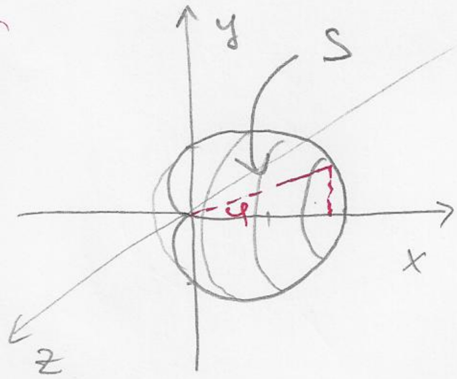


Polje $\vec{R}$ je vzporedno $\vec{n}$.
Če je $\vec{r}(t)$ parametrizacija $K \Longrightarrow \dot{\vec{r}}(t)$ je tang. vektor na $K \Longrightarrow \dot{\vec{r}}(t) \perp \vec{n}, \vec{R}$

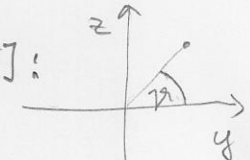
Torej je $I(K) = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\vec{R}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)}_{=0} \, dt = 0$

3. naloga

Krivuljo v ravnini $z = 0$, ki je v polarnih koordinatah podana z enačbo $r = 1 + \cos\varphi$, zavrtimo okrog abscisne osi in dobimo ploskev S_0. Naj bo S tisti del ploskve S_0, ki leži v polprostoru $z > 0$. Izračunaj površino in koordinato z_T težišča T homogene ploskve S.



Vpeljimo še kot $\vartheta \in [0, \pi]$:



$$\vec{r}(\varphi, \vartheta) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi\cos\vartheta,\ r\sin\varphi\sin\vartheta)$$

$$\vec{r}_\varphi = (\underbrace{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}_{b},\ (\underbrace{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}_{a})\cos\vartheta,\ a\sin\vartheta)$$

$$\vec{r}_\vartheta = (0,\ -r\sin\varphi\sin\vartheta,\ r\sin\varphi\cos\vartheta)$$

8

$$E = \|\vec{r}_\varphi\|^2 = b^2 + a^2 = r'^2 + r^2 = \sin^2\varphi + 1 + \cos^2\varphi + 2\cos\varphi = 2(1+\cos\varphi)$$

$$F = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\vartheta = 0$$

$$G = \|\vec{r}_\vartheta\|^2 = r^2\sin^2\varphi = (1+\cos\varphi)^2\sin^2\varphi$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{2}\,(1+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}} \underbrace{\sin\varphi}_{\text{ker za } \varphi \in [0,\pi]:\ \sin\varphi \geq 0}$$

5

$$\boxed{P(S)} = \sqrt{2}\int_0^\pi d\vartheta \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi\, d\varphi \underset{1+\cos\varphi = t}{=} \pi\sqrt{2}\int_0^2 t^{3/2}\,dt =$$

$$= \pi\sqrt{2}\cdot \frac{2t^{5/2}}{5}\Big|_0^2 = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}\cdot 4\sqrt{2} = \boxed{\frac{16\pi}{5}}$$

$$z_T = \frac{\int_S z\,dS}{P(S)}\ :\ \int_S z\,dS = \sqrt{2}\underbrace{\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta}_{2}\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^{\frac{5}{2}}\sin^2\varphi\, d\varphi =$$

7

$$\underset{1+\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{=} 2\sqrt{2}\int_0^\pi 2^{5/2}\cos^5\frac{\varphi}{2}\cdot 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 16\cdot 4\cdot \int_0^\pi \cos^7\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi \underset{t = \frac{\varphi}{2}}{=} 16\cdot 8\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\overset{2p-1}{7}} t\, \underset{2}{\sin^{\overset{2q-1}{2}} t}\, dt =$$

$$= 16\cdot 4\cdot B\left(4, \frac{3}{2}\right) = 16\cdot 4\cdot \frac{\Gamma(4)\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{11}{2})} = 16\cdot 4\,\frac{\cancel{6}\cdot \cancel{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\cancel{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}}$$

$$= \frac{16\cdot 2^7}{9\cdot 7\cdot 5} \Longrightarrow \boxed{z_T} = \frac{\cancel{5}\cdot 2^7}{9\cdot 7\cdot \cancel{5}\pi} = \boxed{\frac{128}{63\pi}}$$

4. naloga

Dani so stožec C z enačbo $z = \sqrt{x^2+y^2}$, ravnina Π_1 z enačbo $z = 1$, ravnina Π_2 z enačbo $x - 2z + 3 = 0$ in vektorsko polje $\vec{f}$, podano s predpisom

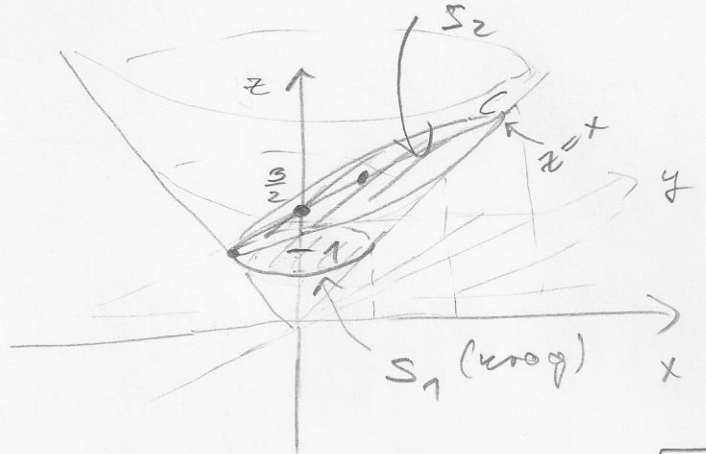
$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r}.$$

Stožec C iz ravnin Π_1 in Π_2 izreže zapored omejeni ploskvi S_1 in S_2.

a) Izračunaj pretoka polja $\vec{f}$ skozi ploskvi S_1 in S_2.

b) Naj bo D telo, ki ga oklepajo ploskve C, S_1 in S_2 in $S = \partial D \cap C$. Določi pretok polja $\vec{f}$ skozi ploskev S in nato s pomočjo Gaussovega izreka določi prostornino telesa D.

a)



$x-2z+3=0 \iff$

$z = \frac{x}{2}+\frac{3}{2}$, $z = x$ $\Rightarrow x=z=3$

$S_2: \; x - 2\sqrt{x^2+y^2}+3=0$

$\iff x+3 = 2\sqrt{x^2+y^2}$

$x^2+6x+9 = 4x^2+4y^2$

$3x^2-6x+3+4y^2 = 12$

$\underbrace{3(x-1)^2+4y^2=12}_{\text{elipsa } E}$

$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

$\Rightarrow$ Ploskev S_2 je projekcija elipse E na ravnino Π in je tudi elipsa s polosema (v y smeri enaka): $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{3}$ in središčem v $S(1,0,2)$

$$\int_{S_1} \vec{f}\, d\vec{S} = \int_{S_1} (x,y,z)\cdot(0,0,-1)\, dS = -\int_{S_1} z\, dS = -\underset{1}{z_T}\cdot \underset{\pi}{P(S)} = -\pi$$

5

$$\int_{S_2} \vec{f}\, d\vec{S} = \int_{S_2} (x,y,z)\cdot \frac{(-1,0,2)}{\sqrt{5}}\, dS = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\underset{1}{x_T}+\underset{2}{z_T})P(S_2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 1\cdot \pi\sqrt{5}\cdot\sqrt{3} = \underline{\underline{\pi\sqrt{3}}}$$

7

(12)

b) Polje $\vec{f}$ je pravokotno na normalo S $\Rightarrow \boxed{\int_S \vec{f}\, d\vec{S} = 0}$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} = \int_S + \int_{S_1} + \int_{S_2} = \pi(\sqrt{3}-1) \underset{\text{Gauss}}{=} \int_D \operatorname{div}\vec{f}\, dV = \int_D 3\, dV = 3V(D)$$

(8)

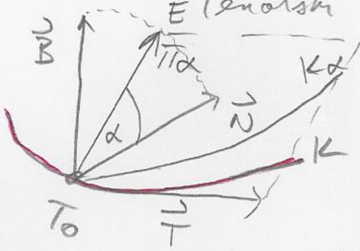
$$\Rightarrow \boxed{V(D) = \frac{\pi(\sqrt{3}-1)}{3}}$$

5. naloga

Dana sta krivulja $K \subset \mathbb{R}^3$, ki premore regularno dvakrat zvezno odvedljivo parametrizacijo, in $T_0 \in K$. Naj bo $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ spremljajoči trirob krivulje K v točki T_0 in Π_α taka ravnina skozi točko T_0, da je vzporedna vektorju $\vec{T}$ in z vektorjem $\vec{N}$ oklepa kot α. Naj bo K_α pravokotna projekcija krivulje K na ravnino Π_α. Določi fleksijsko ukrivljenost krivulje K_α v točki T_0.
POMOČ: Če je $\vec{r}(t)$ parametrizacija krivulje s poljubnim parametrom, je njena fleksijska ukrivljenost enaka

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|^3}.$$

$\vec{E}$ (enotski vektor na Π_α : $\vec{E} = \vec{N}\cos\alpha + \vec{B}\sin\alpha$)



Parametrizacija z naravnim parametrom: $\vec{r}(0) = \vec{r}_{T_0}$

$$\vec{r}(s) = f(s)\vec{T} + g(s)\vec{N} + h(s)\vec{B}$$

Predpostavimo lahko, da je $\vec{r}(0) = 0$ (sicer premaknemo).
Potem je $\vec{r}\,'(0) = \vec{T} \Longrightarrow f'(0) = 1$, $g'(0) = h'(0) = 0$ in
$\vec{r}\,''(0) = \varkappa_0 \vec{N} \Longrightarrow f''(0) = 0$, $g''(0) = \varkappa_0$, $h''(0) = 0$.

Projekcijo v ravnino Π_α parametriziramo kot

$$\vec{r}_\alpha(s) = (\vec{r}(s)\cdot\vec{T})\vec{T} + (\vec{r}(s)\cdot\vec{E})\vec{E} =$$
$$= f(s)\vec{T} + (g(s)\cos\alpha + h(s)\sin\alpha)\vec{E}$$

$$\vec{r}_\alpha\,'(0) = f'(0)\vec{T} + (g'(0)\cos\alpha + h'(0)\sin\alpha)\vec{E} = \vec{T}$$

$$\vec{r}_\alpha\,''(0) = f''(0)\vec{T} + (g''(0)\cos\alpha + h''(0)\sin\alpha)\vec{E} = \varkappa_0\cos\alpha\,\vec{E}$$

$$\Longrightarrow \varkappa_\alpha = \frac{\varkappa_0|\cos\alpha|\,\overbrace{|\vec{T}\times\vec{E}|}^{\text{enotski}}}{\underbrace{|\vec{T}|^3}_{1}} = \varkappa_0|\cos\alpha|$$