2. kolokvij iz Analize 2b

9. 6. 2014

Veliko uspeha!

Ime in priimek

Vpisna številka

Σ

1. naloga (10 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$.

Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- P — Če je $A \subset \mathbb{C}$ končna množica in funkcija f holomorfna na $\mathbb{C} \setminus A$, obstaja limita $\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} f(z)dz$.
- N — Obstaja taka holomorfna funkcija f, ki ima bistveno singularnost v 0, funkcija $g(z) = z^{2014}f(z)$ pa ima v 0 odpravljivo singularnost.
- P — Realni del holomorfne funkcije je harmonična funkcija.
- N — Če je $f : D_1 \to D_2$ konformna preslikava in je D_1 omejeno območje, je tudi D_2 omejena množica.
- P — Če je $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ vrsta, ki konvergira v točkah i in -2, je funkcija f holomorfna na kolobarju $A(0; 1, 2)$.
- P — Če je $D \subset \mathbb{C}$ odprta povezana množica ter f funkcija, ki je holomorfna na D in ima vse vrednosti realne, je funkcija f konstantna.
- N — Vsaka funkcija f, ki je holomorfna na odprti množici D, ima primitivno funkcijo F, ki je holomorfna na D.
- N — Obstaja bijektivna holomorfna preslikava $f : \mathbb{C} \to \Delta$, kjer je Δ odprt enotski krog.
- P — Če je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, za katero velja $n^2 f(1/n) = 1$ za vsako naravno število n, je $f(z) = z^2$ za vsako $z \in \mathbb{C}$.
- N — Za odprto omejeno množico $D \subset \mathbb{C}$ s kosoma gladkim robom velja $\int_{\partial D} \bar{z} dz = 0$.

2. kolokvij iz Analize 2b

9. 6. 2014

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 80 točk.
Veliko uspeha!

1	
2	
3	
4	
Σ	

Sedež (2.01)

Ime in priimek

Vpisna številka

2. naloga

a) Določi tako konstanto C, da bo $u(x,y) = ye^x\cos y + xe^x\sin y + Ce^y$ realni del neke cele funkcije $f(x+iy)$.
b) Določi tisto funkcijo iz točke a), za katero velja $f(0)=0$ in izračunaj integral

$$\int_{|z|=1} f(1/z)dz.$$

a) 5 $u_{xx}+u_{yy} = 0 = \cancel{ye^x\cos y} + (\cancel{xe^x} + 2e^x)\sin y + (-\cancel{y\cos y} - 2\cancel{\sin y})e^x - \cancel{xe^x\sin y} + Ce^y \iff \boxed{C=0}$

b) $v(x,0) = -\int u_y(x,0)\,dx = -\int (x+1)e^x\,dx =$

$= -xe^x + D$

$f(x) = -ixe^x + iD \Longrightarrow f(0) = iD \Rightarrow D=0$

10

$\longrightarrow \boxed{f(z) = -ize^z}$

$g(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{zz^2} + \dots$

$I = -i\int_{|z|=1} \underbrace{\frac{1}{z}e^{\frac{1}{z}}}_{g(z)}dz = -i(2\pi i)\,\mathrm{Res}(g,0) =$

$= 2\pi\cdot 1 = \underline{\underline{2\pi}}$ 5

3. naloga

Naj bo $a > e$, $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$ in n naravno število. Ugotovi, koliko kompleksnih rešitev ima na krogu Δ enačba $e^z = az^n$.

Rouchéjev izrek: $\underbrace{az^n}_{F(z)} - \underbrace{e^z}_{f(z)} = 0$

$|z| = 1 \Longrightarrow |F(z)| = a$, $|f(z)| = |e^{\cos\varphi + i\sin\varphi}| =$

$= e^{\cos\varphi} \leq e < |F(z)|$

Enačba ima toliko rešitev kot ima F ničel na Δ, tj. n rešitev.

4. naloga

S pomočjo Laplaceove transformacije reši sistem diferencialnih enačb

$$x''(t) + 3x(t) + 2y(t) = 0$$

$$y''(t) = 4x(t) + 3y(t),$$

kjer je $x(0) = y'(0) = 1$ in $y(0) = x'(0) = 0$.

$X = \mathcal{L}(x)$, $Y = \mathcal{L}(y) \Rightarrow \mathcal{L}(x'') = z^2 X - z$,

$\mathcal{L}(y'') = z^2 Y - 1$

$$\left.\begin{aligned} z^2X - z + 3X + 2Y &= 0 \\ z^2Y - 1 - 4X - 3Y &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} (z^2+3)X + 2Y &= z \\ -4X + (z^2-3)Y &= 1 \end{aligned}$$

5

$$X = \frac{\begin{vmatrix} z & 2 \\ 1 & z^2-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z^2+3 & 2 \\ -4 & z^2-3 \end{vmatrix}} = \frac{z^3 - 3z - 2}{z^4 - 1} =$$

$$= \frac{\cancel{(z+1)}(z^2 - z - 2)}{(z-1)\cancel{(z+1)}(z^2+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2+1} =$$

$$= \frac{A(z^2+1) + (Bz+C)(z-1)}{\quad} \Rightarrow \begin{aligned} z^2 &: 1 = A+B \\ z &: -1 = C-B \\ 1 &: -2 = A-C \end{aligned} \quad -3 = A - B, \quad -2 = 2A$$

10

$A = -1$, $B = 2$, $C = 1$

$$\Rightarrow x = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{z-1} + \frac{2z}{z^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) =$$

$$= \boxed{-e^t + 2\cos t + \sin t}$$

5

$$y(t) = -\frac{1}{2}(x'' + 3x) = -\frac{1}{2}\left(-e^t - 2\cos t - \sin t - 3e^t + 6\cos t + 3\sin t\right) =$$

$$= \boxed{2e^t - 2\cos t - \sin t}$$

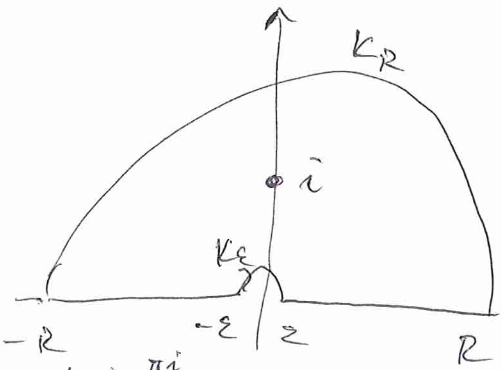
5. naloga

S pomočjo integracije ustrezne holomorfne funkcije po robu območja

$$D = \{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\,,\ \varepsilon < |z| < R\},$$

kjer je $0 < \varepsilon < R$, izračunaj integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln^2(x)dx}{x^2+1}.$$



$$f(z) = \frac{\ln^2 z}{z^2+1}\,, \quad \arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

5

$\ln i = \frac{\pi i}{2}$

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, i) = 2\pi i \frac{\ln^2 i}{2i} = -\frac{\pi^3}{4}$$

pol 1. stopnje $\qquad \lim f(z)(z-i)$

$\ln Re^{i\varphi} = \ln R + i\varphi$

$$\left|\int_{K_R} f(z)dz\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{(\ln R + i\varphi)^2}{R^2e^{2i\varphi}+1}\right| |iRe^{i\varphi}|d\varphi \leq \pi \cdot \frac{R(\ln^2 R + \pi^2)}{R^2-1}$$

$$\xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\left|\int_{K_\varepsilon}\right| \leq \pi \frac{\varepsilon(\ln^2\varepsilon + \pi^2)}{1-\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

15

$$\int_\varepsilon^R f(z)dz \xrightarrow[R\to\infty]{\varepsilon\to 0} I$$

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)dz \longrightarrow \int_\infty^0 \frac{(\ln x + i\pi)^2(-dx)}{x^2+1} = I + 2\pi i \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}dx - \pi^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$$

$z = -x$

$\ln z = \ln x + i\pi$

$\operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2}$

V limiti $\quad -\frac{\pi^3}{4} = 2I - \frac{\pi^3}{2} \implies 2I = \frac{\pi^3}{4} \implies \boxed{I = \frac{\pi^3}{8}}$