Rešitve 3. kolokvija iz Analize 2 z dne 21. 4. 2010

(1) Dana je krivulja L s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = (2t + t^2, t^3 - t^4, 1 + t)$$

vektorsko polje $\vec{F}(x, y, z) = (y + z, ax + bz, x + y)$ ter točka $T_0(0, 0, 1)$ na krivulji. Naj bo k pritisnjena krožnica na krivuljo L v točki T_0 in T_1 točka, ki na krožnici k leži nasproti točki T_0. Določi konstanti a in b tako, da bo $\vec{F}$ potencialno polje in izračunaj integral polja $\vec{F}$ po loku krožnice k med točkama T_0 in T_1. Ali je rezultat odvisen od tega, po katerem izmed dveh možnih lokov integriraš?

Rešitev: Dana točka T_0 ustreza vrednosti parametra $t = 0$. Izračunajmo najprej odvoda dane parametrizacije:

$$\dot{\vec{r}} = (2 + 2t, 3t^2 - 4t^3, 1)\,,\ \ddot{\vec{r}} = (2, 6t - 12t^2, 0).$$

Tangentni vektor v točki T_0 je tedaj

$$\vec{\xi_0} = \frac{\dot{\vec{r}}(0)}{|\dot{\vec{r}}(0)|} = \frac{(2, 0, 1)}{\sqrt{5}},$$

vektor binormale pa

$$\vec{\zeta_0} = \frac{\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0)}{|\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0)|} = \frac{(0, 2, 0),}{2} = (0, 1, 0).$$

Od tod izračunamo še glavno normalo

$$\vec{\eta_0} = \vec{\zeta_0} \times \vec{\xi_0} = \frac{(1, 0, -2)}{\sqrt{5}}.$$

Fleksijsko ukrivljenost krivulje v točki T_0 izračunamo po formuli

$$\kappa_0 = \frac{|\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0)|}{|\dot{\vec{r}}(0)|^3} = \frac{2}{5\sqrt{5}},$$

kar pomeni, da je polmer pritisnjene krožnice točki T_0 enak $R_0 = \frac{5\sqrt{5}}{2}$. Krajevni vektor točke T_1 je zato enak $\vec{OT_1} = \vec{OT_0} + 2R_0\vec{\eta_0} = (0, 0, 1) + (5, 0, -10) = (5, 0, -9)$.

Sedaj iz pogoja $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ določimo konstanti a in b. Velja $\operatorname{rot}\vec{F} = (1 - b, 1 - 1, a - 1)$, od koder sledi $a = b = 1$ in $\vec{F} = (y + z, x + z, x + y)$. Iz pogojev $u_x = y + z$, $u_y = x + z$ in $u_z = x + y$ ugotovimo, da ima polje $\vec{F}$ potencial $u = xy + xz + yz + C$. Integral polja $\vec{F}$ po neki poti med točkama T_0 in T_1 je tedaj enak $u(5, 0, -9) - u(0, 0, 1) = -45$ in je neodvisen od izbire poti.

(2) Krivulja K je podana z enačbama $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ in $x + y = 1$. Izračunaj integral

$$\int_K -2zx\,dx + y^{2010}\,dy + (x + y^2 + e^{z^2})\,dz,$$

če je krivulja K pozitivno orientirana gledano iz koordinatnega izhodišča.

Rešitev: Krivulja K je krožnica v ravnini Π z enačbo $x+y = 1$. Središče te krožnice je očitno v točki $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, na krožnici K pa leži na primer točka $A(1, 0, 0)$, zato je polmer krožnice enak $a = d(A, C) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ker je K zaključena krivulja, lahko uporabimo Stokesov izrek. Vektorsko polje, ki ga integriramo je enako

$$\vec{F} = (-2xz, y^{2010}, x + y + e^{z^2})$$

in velja

$$\operatorname{rot} \vec{F} = (2y, -2x - 1, 0).$$

Naj bo tisti S krog v ravnini Π, katerega rob je krivulja K. Tedaj velja

$$I = \int_K \vec{F} d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S} = \int_S ((\operatorname{rot} \vec{F})\vec{n}) dS,$$

kjer je $\vec{n}$ enotska normala ploskve S, ki mora po pogojih naloge kazati proti izhodišču. Sledi, da je

$$\vec{n} = \frac{(-1, -1, 0)}{\sqrt{2}},$$

zato je

$$I = \int \frac{(2y, -2x - 1, z)(-1, -1, 0)}{\sqrt{2}} dS = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2y_T + 2x_T + 1)P(S),$$

kjer sta $x_T = y_T = \frac{1}{2}$ koordinati težišča ploske S, $P(S) = \pi a^2 = \frac{\pi}{2}$ pa njena površina. Sledi, da je

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

(3) Dano je vektorsko polje $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$, kjer je f zvezno odvedljiva funkcija in $r = |\vec{r}|$. Naj bo $D = \{(x,y,z) \mid x,y,z \geq 0\,,\ x+y+z \leq 1\}$ in $S = \{(x,y,z) \mid x,y,z \geq 0\,,\ x+y+z = 1\}$.

a) Izračunaj divergenco polja $\vec{F}$.

b) Dokaži, da je $\int_D \operatorname{div} \vec{F} dV = \int_S \vec{F} d\vec{S}$.

c) Izračunaj $\int_S \vec{F} d\vec{S}$ v primeru, ko je $f(r) = r^2$.

Rešitev: a) Iz zveze $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ izračunamo parcialne odvode $r_x = \frac{x}{r}$, $r_y = \frac{y}{r}$ in $r_z = \frac{z}{r}$. Polje $\vec{F}$ je enako

$$\vec{F} = (xf(r), yf(r), zf(r)).$$

zato je njegova divergenca enaka

$$\operatorname{div} \vec{F} = (f(r) + xf'(r)r_x) + (f(r) + yf'(r)r_y) + (f(r) + zf'(r)r_x) =$$

$$= 3f(r) + f'(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r} = 3f(r) + rf'(r).$$

b) Zapišimo Gaussov izrek za območje D:

$$\int_{bD} \vec{F} d\vec{S} = \int_D \operatorname{div} \vec{F} dV.$$

Rob območja D sestavljajo tri ploske S_x, S_y in S_z, ki zapored ležijo v ravninah z $x = 0$, $y = 0$ in $z = 0$, ter ploskev S. Normala ploskve S_x, ki kaže iz območja D je enaka $(-1,0,0)$ krajevni vektor neke točke na ploskvi S_x pa je oblike $\vec{r} = (0,y,z)$, zato je polje $\vec{F} = (0, yf(r), zf(r))$ pravokotno na normalo ploskve S_x in je njegov pretok $\int_{S_x} \vec{F} d\vec{S} = 0$. Na enak način se prepričamo tudi, da sta tudi pretoka skozi ploskvi S_y in S_z enaka 0, torej res velja

$$\int_S \vec{F} d\vec{S} = \int_D \operatorname{div} \vec{F} dV.$$

c) V primeru $f(r) = r^2$ po točki a) dobimo

$$\operatorname{div} \vec{F} = 3f(r) + rf'(r) = 5r^2.$$

Po točki b) velja

$$I = \int_S \vec{F} d\vec{S} = \int_D \operatorname{div} \vec{F} dV = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} 5(x^2+y^2+z^2) dz.$$

Iz simetrije sledi $\int_D x^2 dV = \int_D y^2 dV = \int_D z^2 dV$, zato je

$$I = 5 \cdot 3 \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = 15 \int_0^1 x^2 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{15}{2} \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2) dx =$$

$$= \frac{15}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}.$$

(4) Naj bo K gladka krivulja brez samopresečišč in $\vec{r}(s)$ parametrizacija krivulje K z naravnim parametrom $s \in [0, l]$. Denimo, da ima krivulja K v točki $\vec{r}(s)$ spremljajoči trieder $(\vec{\xi}(s), \vec{\eta}(s), \vec{\zeta}(s))$, fleksijsko ukrivljenost κ in torzijsko ukrivljenost ω. Naj bo $L(s)$ daljica z dolžino $2a > 0$, ki je vzporedna vektorju $\vec{\zeta}(s)$ in ima središče v točki $\vec{r}(s)$. Izberemo tako majhen $a > 0$, da se daljici $L(s_1)$ in $L(s_2)$ ne sekata za $s_1 \neq s_2$ in definiramo ploskev

$$S_a(K) = \cup_{s\in[0,l]} L(s).$$

a) Zapiši integral za površino P_a ploskve $S_a(K)$ in se prepričaj, da je odvisen le od torzijske ukrivljenosti krivulje K.

b) Določi limito $\lim_{a\to 0} \frac{P_a}{2a}$.

c) Izračunaj P_a, če je torzijska ukrivljenost $\omega = \omega_0 > 0$ konstantna.

Pomoč: $\int \sqrt{1+x^2}dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$

Rešitev: a) Ploskev $S_a(K)$ dobimo, če se iz vsake točke $\vec{r}(s)$ krivulje K 'zapeljemo' v smeri binormale za a v eno smer in za a v nasprotno smer. To pomeni, da lahko ploskev S_a parametriziramo v obliki

$$\vec{R}(s,t) = \vec{r}(s) + t\vec{\zeta}(s),$$

kjer velja $s \in [0, l]$ in $t \in [-a, a]$. Tedaj velja $\vec{R}_s = \vec{r}'(s) + t\vec{\zeta}'(s)$, od koder po Frenetovih formulah dobimo

$$\vec{R}_s = \vec{\xi}(s) - t\omega(s)\vec{\eta}(s).$$

Izračunamo še

$$\vec{R}_t = \vec{\zeta}(s),$$

od koder sledi

$$dS = |\vec{R}_s \times \vec{R}_t| dsdt = |-\vec{\eta}(s) - t\omega(s)\vec{\xi}(s)| dsdt = \sqrt{1 + t^2\omega(s)^2} dsdt,$$

zato je površina ploskve $S_a(K)$ enaka

$$P_a = \int_0^l ds \int_{-a}^a \sqrt{1+t^2\omega(s)^2}dt = 2\int_0^l ds \int_0^a \sqrt{1+t^2\omega(s)^2}dt.$$

b) Iskano limito izračunamo po L'Hospitalovem pravilu. Odvod $\frac{d}{da}(P_a)$ je enak

$$\frac{d}{da}(P_a) = 2\int_0^l ds \frac{\partial}{\partial a}\left(\int_0^a \sqrt{1+t^2\omega(s)^2}dt\right) = 2\int_0^l \sqrt{1+a^2\omega(s)^2}ds,$$

torej je

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{d}{da}(P_a)\right) = 2\int_0^l \lim_{a\to 0}\sqrt{1+a^2\omega(s)^2}ds = 2\int_0^l ds = 2l.$$

Od tod sledi, da je

$$\lim_{a\to 0}\frac{P_a}{2a} = \frac{\lim_{a\to 0}\left(\frac{d}{da}(P_a)\right)}{2} = l.$$

c) Po točki a) dobimo

$$P_a = 2\int_0^l ds \int_0^a \sqrt{1+t^2\omega_0^2}dt = \frac{2l}{\omega_0}\int_0^{a\omega_0} \sqrt{1+x^2}dx =$$
$$= \frac{2l}{\omega_0}\ln(a\omega_0 + \sqrt{1+a^2\omega_0^2}).$$