Rešitve 4. kolokvija iz Analize 2 z dne 3. 6. 2010

(1) a) Določi holomorfno funkcijo f, za katero velja $f(0) = 1$ in ima realni del $u(x+iy) = e^{-y}\cos x$.
b) Izračunaj kompleksni integral

$$\int_{|z|=2} \frac{f(1/z)}{1-z}dz.$$

Rešitev: a) Velja $u_y = -e^{-y}\cos x$, torej je iz Cauchy-Riemannove zveze $v_x = -u_y$ dobimo $v_x(x,0) = \cos x$, od koder sledi $v(x,0) = \sin x + C$. Za $x \in \mathbb{R}$ tako velja

$$f(x) = u(x,0) + iv(x,0) = \cos x + i(\sin x + C) = e^{ix} + iC.$$

Ker vrednosti na množici $\mathbb{R}$ (množica s stekališčem) enolično določajo funkcijo in je $1 = f(0) = 1 + iC$, dobimo $C = 0$ in

$$f(z) = e^{iz}.$$

b) Holomorfna funkcija $g(z) = \frac{f(1/z)}{1-z} = \frac{e^{i/z}}{1-z}$ ima singularnosti $z_1 = 0$ in $z_2 = 1$, ki sta obe objeti s krožnico $|z| = 2$. Residuum v točki 0 določimo s pomočjo razvoja v potenčno vrsto. Pišemo

$$\frac{e^{i/z}}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!z^k} \sum_{l=0}^{\infty} z^l = \cdots + \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} + \cdots,$$

kar pomeni, da je $\mathrm{Res}(g,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} = e^i - 1$. V točki $z = 1$ ima funkcija g pol prve stopnje, zato je $\mathrm{Res}(g,1) = \lim_{z\to 1} g(z)(z-1) = -e^i$, torej je

$$\int_{|z|=2} \frac{f(1/z)}{1-z}dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(g,0) + \mathrm{Res}(g,1)) = -2\pi i.$$

(2) S pomočjo kompleksne integracije izračunaj integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{(1+x^2)^2}.$$

Rešitev: Definirajmo holomorfno funkcijo f s predpisom $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$ in za $R > 1$ integrirajmo funkcijo f po robu območja $D = \{z \,|\, |z| < R\,,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Funkcija f ima na območju D le singularnost $z = i$, zato je

$$\int_{bD} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i).$$

Funkcija f ima v točki $z = i$ je pol druge stopnje, zato je

$$\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z\to i} \frac{1}{1!}(f(z)(z-i)^2)' = \lim_{z\to i} \frac{ie^{iz}(z+i)^2 - 2e^{iz}(z+i)}{(z+i)^4} = \frac{-i}{2e}.$$

Integral po robu območja D razdelimo na integrala po intervalu $I_R = [-R, R] \subset \mathbb{R}$ in zgornji polovici krožnice $|z| = R$, ki jo označimo s K_R. Integral po intervalu I_R je enak $\int_{-R}^{R} \frac{\cos x\, dx}{(1+x^2)^2} + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin x\, dx}{(1+x^2)^2}$. Funkcija $\frac{\cos x}{(1+x^2)^2}$ je soda, funkcija $\frac{\sin x}{(1+x^2)^2}$ pa liha, zato velja

$$\int_{I_R} f(z)dz = 2\int_0^R \frac{\cos x\, dx}{(1+x^2)^2},$$

in je

$$\lim_{R\to\infty} \int_{I_R} f(z)dz = 2I.$$

Pokažimo še, da velja $\lim_{R\to\infty} \int_{K_R} f(z)dz = 0$. Krožnico K_R parametriziramo v obliki $z = Re^{i\varphi}$. Tedaj dobimo $dz = iRe^{i\varphi}d\varphi$ in tako

$$\left|\int_{K_R} f(z)dz\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{e^{iR(\cos\varphi + i\sin\varphi)} iRe^{i\varphi}}{(1+R^2e^{2i\varphi})^2}\right| d\varphi \le \int_0^\pi \frac{Re^{-R\sin\varphi}}{(R^2-1)^2} d\varphi \le$$

$$\le \int_0^\pi \frac{R}{(R^2-1)^2} d\varphi = \pi \frac{R}{(R^2-1)^2}.$$

Ker je $\lim_{R\to\infty} \frac{R}{(R^2-1)^2} = 0$, velja tudi $\lim_{R\to\infty} \int_{K_R} f(z)dz = 0$, zato dobimo

$$2\pi i \mathrm{Res}(f, i) = \frac{\pi}{e} = \int_{bD} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_{bD} f(z)dz = 2I,$$

torej je

$$I = \frac{\pi}{2e}.$$

(3) Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in

$$D = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\,,\ |z-a| > 1\}.$$

a) Ugotovi za katere vrednosti a obstaja biholomorfna preslikava iz D na odprt enotski krog $\triangle$?

b) Za $a = 1$ in $a = \frac{1}{2}$ poišči kako zaporedje biholomorfnih preslikav, katerih kompozitum preslika območje D na odprt enotski krog $\triangle$.

Rešitev: a) Območje D dobimo, če iz desne polravnine izrežemo krog $\overline{K}(a,r)$. Če je $a > 1$ ima območje D luknjo, zato ni enostavno povezano in tako ne more biti biholomorfno ekvivalentno krogu $\triangle$. Za $a \leq 1$ dobimo enostavno povezano območje $D \neq \mathbb{C}$, ki je po Riemannovem izreku biholomorfno ekvivalentno krogu $\triangle$.

b) Za $a = 1$ rob območja D tvorita krožnica k z enačbo $|z-1| = 1$ in imaginarna os Im, ki se je krožnica k dotika v izhodišču. Z lomljeno linearno preslikavo $f_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, za katero velja $f_1(0) = \infty$, $f_1(2) = 2\pi i$ in $f_1(\infty) = 0$, se realna os preslika v imaginarno os. Krožnica k in imaginarna os sta pravokotni na realno os, zato se preslikata v premici, ki sta pravokotni na imaginarno os in potekata skozi točki $2\pi i$, oziroma 0. Iz zahtev za funkcijo f_1 dobimo $f_1(z) = \frac{b}{z}$, od koder iz pogoja $f_1(2) = 2\pi i$ sledi še $b = 4\pi i$. Ker je $4 \in D$ in velja $f_1(4) = i$, se območje D s preslikavo f_1 preslika v pas D_1 med premicama $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R} + 2\pi i$. Pas D_1 s preslikavo $f_2(z) = e^z$ preslikamo v prerezano ravnino $D_2 = \mathbb{C} \setminus \{x \mid x \geq 0\}$, ki jo s preslikavo $f_3(z) = \sqrt{z}$ preslikamo v gornjo polravnino, to pa nazadnje z lomljeno linerano preslikavo f_0 preslikamo na odprt enotski krog.

Za $a = \frac{1}{2}$ se krožnica k z enačbo $|z - \frac{1}{2}| = 1$ seka z imaginarno osjo v točkah $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} i$ in $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} i$ pod kotom $\frac{\pi}{3}$. Definirajmo lomljeno linearno preslikavo $f_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, za katero velja $f_1(z_1) = 0$, $f_1(z_2) = \infty$ in $f_1(\frac{3}{2}) = 1$. Dobimo $f_1(z) = a\frac{(z-z_1)}{z-z_2}$, od koder sledi $1 = f_1(\frac{3}{2}) = a\frac{3-\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}$, zato je

$$f_1(z) = \frac{3+\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i} \cdot \frac{2z-\sqrt{3}i}{2z+\sqrt{3}i}.$$

Preslikava f_1 preslika krožnico k na realno os, imaginarna os, ki se s krožnico k seka pod kotom $\frac{\pi}{3}$, pa se tako preslika v premico, ki s pozitivnim poltrakom realne osi oklepa kot $\frac{\pi}{3}$. Od tod sledi, da se območje D s preslikavo f_1 preslika v kot $D_1 = \{z \mid \arg z \in (0, \frac{\pi}{3})\}$. S preslikavo $f_2(z) = z^3$ kot D_2 'razpremo' do gornje polravnine, ki jo nazadnje spet s preslikavo f_0 preslikamo na odprt enotski krog.

(4) a) Ali obstaja kaka nekonstantna funkcija $f(z)$, ki je holomorfna na nekem območju $D \subset \mathbb{C}$ in je odvisna le od absolutne vrednosti $|z|$?
b) Ali obstaja kaka nekonstantna funkcija $f(z)$, ki je holomorfna na neki povezani okolici števila 0, njen realni del pa je odvisen le od absolutne vrednosti $|z|$?
c) Ali obstaja kaka nekonstantna funkcija $f(z)$, ki je holomorfna na nekem območju $D \subset \mathbb{C}$, njen realni del pa je odvisen le od absolutne vrednosti $|z|$?

REŠITEV: a) Denimo, da taka funkcija f obstaja in je holomorfna na odprti množici D. Tedaj za $z \in \overline{D}$ lahko definiramo funkcijo g s predpisom $g(z) = f(\overline{z}) = f(|\overline{z}|) = f(|z|) = f(z)$. Torej sta tako funkciji f kot g holomorfni, kar pa vemo, da je mogoče le, če je funkcija f konstantna.
b) Denimo, da obstaja taka funkcija $f = u + iv$, holomorfna na nekem krogu $K(0, a)$ za $a > 0$. Tedaj za $r < a$ velja

$$a + ib = f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{u(r) + iv(re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (u(r) + iv(re^{i\varphi})) i d\varphi.$$

Od tod dobimo $a = u(r) = u(re^{i\varphi})$, kar pomeni, da je realni del u konstanten na krogu $K(0, a)$. Od tod sledi, da je funkcija f konstantna.
c) Primer take funkcije je $f(z) = \ln z$, pri izbiri argumenta $\arg z \in (-\pi, \pi)$.