Analiza II

Josip Globevnik

Miha Brojan

20. marec 2008

Kazalo

Poglavje 1

Funkcije več spremenljivk

1.1 O prostoru $\mathbb{R}^n$

Na množici $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n}$ urejenih n-teric $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definiramo operaciji seštevanja elementov iz $\mathbb{R}^n$ in množenja elementov iz $\mathbb{R}^n$ z realnimi števili; za $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ naj velja

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Iz linearne algebre vemo, da operaciji zgoraj zadoščata aksiomom vektorskega prostora. Množica $\mathbb{R}^n$ je torej n-razsežni vektorski prostor. Spomnimo se še nekaj pojmov, npr.

kanonična baza

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$
$$e_2 = (0, 1, \ldots, 0),$$
$$\ldots$$
$$e_n = (0, 0, \ldots, 1),$$

skalarni produkt

$$\begin{aligned}\langle x|y\rangle &= x\cdot y\\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,\end{aligned}$$

norma vektorja x

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{x\cdot x}\\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},\end{aligned}$$

razdalja med vektorjema x in y

$$\begin{aligned}d(x,y) &= \|x-y\|\\ &= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}\\ &= \sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^n (x_k-y_k)^2},\end{aligned}$$

odprta krogla s središčem v točki a in polmerom r je množica

$$\mathcal{K}(a,r) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\| < r\},$$

zaprta krogla s središčem v točki a in polmerom r je množica

$$\overline{\mathcal{K}}(a,r) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq r\},$$

sfera s središčem v točki a in polmerom r je množica

$$\mathcal{S}(a,r) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\| = r\},$$

torej $\mathcal{S}(a,r) = b\mathcal{K}(a,r)$.

Če je $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$, tedaj množico oblike

$$\mathcal{K} = \{x\in\mathbb{R}^n :\ a_1 \leq x_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

imenujemo ***zaprt kvader***.

Neprazna množica je omejena, če je vsebovana v neki krogli. Torej je vsak kvader omejena množica, saj je npr. vsebovana v zaprti krogli

$$\overline{\mathcal{K}}(a,r) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq r\},$$

kjer je $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in $r = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$.

Daljica s krajiščema v točkah a ***in*** b je množica

$$\{a + t(b - a) : 0 \leq t \leq 1\}$$

oziroma

$$\{(1 - t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\},$$

kjer je $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

1.1.1 Zaporedja v $\mathbb{R}^n$

Naj bo $\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ zaporedje v $\mathbb{R}^n$, torej $\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Pri tem je

$$a^{(k)} = \left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Vsako zaporedje $\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ torej določa n-zaporedij komponent oz. koordinat

$$\{a_1^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}, \{a_2^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}, \ldots, \{a_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty};$$

to so običajna zaporedja realnih števil.

Iz poglavja o zaporedjih v metričnih prostorih se spomnimo definicije konvergence zaporedja. Zaporedje $\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ konvergira proti $a \in \mathbb{R}^n$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $k_0 \in \mathbb{N}$, da je $\|a^{(k)} - a\| < \varepsilon$, za vse $k \geq k_0$.

Izrek 1 *Zaporedje* $\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ *konvergira natanko tedaj, ko za vsak* i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *konvergira zaporedje koordinat* $\{a_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$. *Limita zaporedja je točka, ki ima za koordinate limite zaporedij koordinat, t.j.*

$$\lim_{k\to\infty} a^{(k)} = \left(\lim_{k\to\infty} a_1^{(k)}, \lim_{k\to\infty} a_2^{(k)}, \ldots, \lim_{k\to\infty} a_n^{(k)}\right).$$

Dokaz: ($\Rightarrow$) Naj bo $a \in \mathbb{R}^n$ in naj $\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergira proti a. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $k_0 \in \mathbb{N}$, da je

$$\|a^{(k)} - a\| < \varepsilon \text{ za vse } k \geq k_0.$$

Torej

$$\sqrt{(a_1^{(k)}-a_1)^2+(a_2^{(k)}-a_2)^2+\ldots++(a_n^{(k)}-a_n)^2}<\varepsilon,$$

za vse $k \geq k_0$. Od tod sledi

$$|a_1^{(k)}-a_1|<\varepsilon,$$
$$|a_2^{(k)}-a_2|<\varepsilon,$$
$$\ldots$$
$$|a_n^{(k)}-a_n|<\varepsilon,$$

za vse $k \geq k_0$. Iz $|a_1^{(k)}-a_1|<\varepsilon$ za vse $k \geq k_0$ sledi, da $a_1^{(k)}$ konvergira k a_1. Enako velja tudi za ostale komponente. Torej je

$$\lim_{k\to\infty} a_i^{(k)} = a_i \text{ za vse } i \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

($\Leftarrow$) Naj $\{a_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergira proti a_i, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Tedaj za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $k_0 \in \mathbb{N}$, da je

$$|a_i^{(k)}-a_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

za vse $k \geq k_0$ in vse $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Za vsako komponento posebej izberemo k_0, nato izberemo največjega. Sledi

$$\begin{aligned}\|a^{(k)}-a\|^2 &= (a_1^{(k)}-a_1)^2+(a_2^{(k)}-a_2)^2+\ldots+(a_n^{(k)}-a_n)^2\\ &\leq n\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2=\varepsilon^2\end{aligned}$$

za vsak $k \geq k_0$ in od tod $\|a^{(k)}-a\|<\varepsilon$ za vsak $k \geq k_0$. Torej $\lim_{k\to\infty} a^{(k)} = a$.

□

Izrek 2 $\mathbb{R}^n$ *je poln metričen prostor.*

Dokaz: Samo skica. Naj bo $\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ Cauchyevo zaporedje. Od tod sledi, da je za vsak $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ zaporedje koordinat $\{a_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ Cauchyevo. Torej po znanem izreku iz Analize 1 za vsak $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ zaporedje koordinat $\{a_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergira. Po prejšnjem izreku $\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergira k a. □

Izrek 3 *Množica* $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ *je kompaktna natanko tedaj, ko je omejena in zaprta.*

Dokaz: Dovolj je, da dokažemo, da je zaprt kvader kompaktna množica. V eni spremenljivki to vemo iz leme o pokritjih. V več spremenljivkah je dokaz podoben. Podroben dokaz najdemo v knjigi *J. Vrabec: Metrični prostori.* $\square$

1.2 Zvezne preslikave s podmnožic $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Zveznost je definirana tako kot v splošnih metričnih prostorih.

Definicija 1 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ je zvezna v točki $a \in \mathcal{D}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$, čim je $x \in \mathcal{D}$ tak, da je $\|x - a\| < \delta$.*

To pomeni, da se $f(a)$ poljubno malo spremeni, če se le a dovolj malo spremeni. Pri $n = 1$ in $m = 1$ dobimo že znano definicijo.

Definicija 2 *Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ je zvezna na $\mathcal{D}$, če je zvezna v vsaki točki iz $\mathcal{D}$.*

Definicija 3 *Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ je enakomerno zvezna na $\mathcal{D}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $\|f(x) - f(\tilde{x})\| < \varepsilon$ za vsaka $x, \tilde{x} \in \mathcal{D}$, za katera je $\|x - \tilde{x}\| < \delta$.*

Opomba: Če je $m = 1$, preslikavi f rečemo funkcija. Natančneje, če je $m = 1$ in $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pišemo tudi $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in pravimo, da je f funkcija n-spremenljivk.

Opomba: V opombi zgoraj smo pisali $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, čeprav bi v bistvu morali pisati $f(x) = f\big((x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)$, saj je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Poleg tega smo zapisali, da je f funkcija n-spremenljivk, čeprav je spremenljivka ena sama, t.j. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Zgled: Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 x_2.$$

Vrednost funkcije f v točki $(1, 2)$ je $f(1, 2) = 1^3 + 1^3 \cdot 2 = 3.$ $\diamondsuit$

Izrek 4 *Naj bosta funkciji f in g definirani na $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Naj bosta zvezni v $a \in \mathcal{D}$. Tedaj so v točki a zvezne tudi:*

(i) $f + g$,

(ii) $f - g$,

(iii) $f \cdot g$,

(iv) f/g, $g(a) \neq 0$.

Dokaz: Dokažemo na analogen način kot pri funkcijah ene spremenljivke. □

Enak izrek seveda velja za funkcije, ki so zvezne povsod na $\mathcal{D}$.

Izrek 5 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ in $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija v notranji točki $a \in \mathcal{D}$. Tedaj je f v tej točki zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej, t.j. če je $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, so zvezne naslednje funkcije:*

$$\lambda \mapsto f(\lambda, a_2, \ldots, a_n) \text{ v točki } \lambda = a_1,$$

$$\lambda \mapsto f(a_1, \lambda, \ldots, a_n) \text{ v točki } \lambda = a_2,$$

$$\ldots$$

$$\lambda \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, \lambda) \text{ v točki } \lambda = a_n.$$

Opomba: Ker je a notranja točka, obstaja $r > 0$, da je

$$\mathcal{K}(a, r) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < r\} \subset \mathcal{D}.$$

Od tod sledi, da so tudi točke

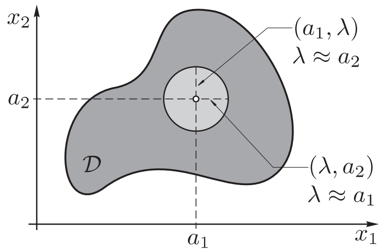
$$\{(\lambda, a_2, \ldots, a_n) : a_1 - r < \lambda < a_1 + r\} \subset \mathcal{D},$$

$$\{(a_1, \lambda, \ldots, a_n) : a_2 - r < \lambda < a_2 + r\} \subset \mathcal{D},$$

$$\ldots$$

$$\{(a_1, a_2, \ldots, \lambda) : a_n - r < \lambda < a_n + r\} \subset \mathcal{D}$$

in so zato zgornje funkcije zagotovo definirane, in sicer: prva v okolici točke a_1, druga v okolici točke a_2, ... Pri tem smo razen λ fiksirali vsako od posameznih komponent. Geometrijski prikaz za $n = 2$ je na sliki 1.1.



Slika 1.1: Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je fiksirana povsod, razen v λ.

Dokaz: Ker je f zvezna v a, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $\|x - a\| < \delta$, $x \in \mathcal{D}$, sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Ker je a notranja točka, je $x \in \mathcal{D}$, čim je $\|x - a\|$ dovolj majhen. Torej iz $\|x - a\| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Naj bo $|\lambda - a_1| < \delta$, tedaj je

$$\|(\lambda, a_2, \ldots, a_n) - (a_1, a_2, \ldots, a_n)\| = \|\lambda - a_1, 0, \ldots, 0\| < \delta,$$

od koder sledi

$$|f(\lambda, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)| < \varepsilon.$$

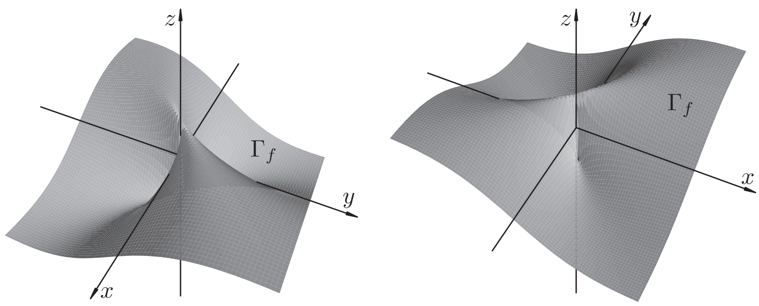
Torej $\lambda \mapsto f(\lambda, a_2, \ldots, a_n)$ je zvezna v $\lambda = a_1$. Podobno pokažemo tudi za ostale primere. □

Pokazali smo torej, da iz zveznosti funkcije f sledi, da je f zvezna tudi kot funkcija vsake spremenljivke posebej. Da obratno v splošnem ne velja, lahko preverimo na naslednjem zgledu.

Zgled: Naj bo

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x, y = 0. \end{cases}$$

Ker je $f(x, 0) = 0$ za vsak x in $f(0, y) = 0$ za vsak y, je torej f v točki $(0, 0)$ gotovo zvezna kot kot funkcija vsake spremenljivke posebej, t.j. $x \mapsto f(x, 0)$ je zvezna pri $x = 0$ in $y \mapsto f(0, y)$ je zvezna pri $y = 0$.



Slika 1.2: Grafa funkcije f

Funkcija f pa ni zvezna v $(0,0)$, kar vidimo takole: Oglejmo si $f(t,t)$, ko je t majhen.

$$\begin{aligned} f(t,t) &= \frac{2t^2}{t^2+t^2} \\ &= \frac{2t^2}{2t^2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

za vse $t > 0$. Torej so poljubno blizu $(0,0)$ točke, v katerih je $f(x,y) = 1$. Ker je $f(0,0) = 0$, funkcija v točki $(0,0)$ ne more biti zvezna. $\Diamond$

1.2.1 Nekaj primerov zveznih funkcij na $\mathbb{R}^n$

Naj bo c realno število. ***Konstantna funkcija***

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto c,$$

je očitno zvezna. Funkcijo π_k

$$\pi_k : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_k, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

imenujemo ***k-ta projekcija prostora*** $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}$. Zveznost pokažemo tako, da v ε-δ definiciji zveznosti vzamemo za δ kar ε. Afina linearna funkcija, t.j.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + d,$$

kjer so a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, in d realna števila, je tudi zvezna na $\mathbb{R}^n$. Polinomi so tudi zvezne funkcije na $\mathbb{R}^n$. Racionalne funkcije, t.j. kvocienti polinomov so zvezne na $\mathbb{R}^n$ povsod, kjer je imenovalec različen od 0.

Zgled: Racionalna funkcija

$$(x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2 + 4}{x - 2y}$$

je zvezna povsod na $\mathbb{R}^2$, razen tam, kjer je $x - 2y = 0$, torej na premici z enačbo $y = \frac{x}{2}$. $\Diamond$

1.3 Preslikave s podmnožic $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ in $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Za vsak $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}$ je slika

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

natančno določena. Vsaka od koordinat

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

je funkcija n-spremenljivk, definirana na $\mathcal{D}$. Torej ima preslikava f m-***koordinatnih (komponentnih) funkcij***. Pisali bomo

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m).$$

Velja pa tudi obratno. Če je na $\mathcal{D}$ definirana m-terica $f_1, f_2, \ldots, f_m$ funkcij, te funkcije določajo preslikavo $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$, kot zgoraj, za katero so te funkcije koordinatne funkcije. Torej

$$\big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\big) = f(x), \qquad x \in \mathcal{D},\ \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n.$$

Zgled: Oglejmo si preslikavo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definirano s predpisom

$$f(x, y) = (x^2 + y, xy, x^3 - y^2).$$

Koordinatne funkcije preslikave f so:

$$f_1(x,y) = x^2 + y,$$

$$f_2(x,y) = xy,$$

$$f_3(x,y) = x^3 + y^2.$$

$\diamondsuit$

Izrek 6 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$, je zvezna v $a \in \mathcal{D}$ natanko tedaj, ko so v točki a zvezne vse njene koordinatne funkcije f_k, $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Naj bo f zvezna v a. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je f zvezna v a, obstaja $\delta > 0$, da iz $\|x - a\| < \delta$, $x \in \mathcal{D}$, sledi $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Izraz $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ pomeni $\sqrt{\sum_{k=1}^m \big(f_k(x) - f_k(a)\big)^2} < \varepsilon$. Od tod sledi $|f_k(x) - f_k(a)| < \varepsilon$ za vsak k, $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Torej je f_k zvezna v a za vsak k, $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

($\Leftarrow$) Naj bodo $f_1, f_2, \ldots, f_m$ zvezne v a. Naj bo $\varepsilon > 0$. Tedaj za vsak $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ obstaja $\delta_k > 0$, da je $|f_k(x) - f_k(a)| < \varepsilon/\sqrt{m}$, čim je $\|x - a\| < \delta_k$, $x \in \mathcal{D}$. Naj bo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$. Če je $\|x - a\| < \delta$, $x \in \mathcal{D}$, je tudi $\|x - a\| < \delta_k$ za vsak $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Torej je $|f_k(x) - f_k(a)| < \varepsilon/\sqrt{m}$. Od tod sledi, da je

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &= \sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^m \big(f_k(x) - f_k(a)\big)^2} \\ &\le \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} + \frac{\varepsilon^2}{m} + \ldots + \frac{\varepsilon^2}{m}} \\ &\le \sqrt{\frac{m\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Torej je f zvezna v a. $\square$

1.4 Odvod vektorske funkcije

Definicija 4 *Naj bo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ interval. Preslikavo $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^m$ tedaj imenujemo* ***vektorska funkcija****. Spremenljivko $t \in \mathcal{I}$ ponavadi imenujemo parameter. Ko t preteče interval $\mathcal{I}$, $f(t)$ preteče neko množico v $\mathbb{R}^m$.*

V ravnini $\mathbb{R}^2$ smo take primere že obravnavali; $x = g(t)$, $y = h(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Slika je ponavadi krivulja v $\mathbb{R}^2$. Pri tem je $t \mapsto \big(g(t), h(t)\big)$ preslikava, $x = g(t)$

in $y = h(t)$ pa sta parametrični enačbi krivulje, npr. enotska krožnica $t \mapsto (x, y)$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

Definicija 5 *Naj bo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ in $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^m$ vektorska funkcija, definirana v vsaki točki intervala $\mathcal{I}$, razen morda v točki a. Točka (vektor) $A \in \mathbb{R}^m$ je **limita vektorske funkcije** f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $\|f(t) - A\| < \varepsilon$, čim je $|t - a| < \delta$. Če to velja, potem pišemo*

$$\lim_{t \to a} f(t) = A.$$

Očitno je

(a) $\lim_{t \to a} f(t) = A$ natanko takrat, ko za vsako koordinatno funkcijo f_k velja

$$\lim_{t \to a} f_k(t) = A_k, \quad k \in \{1, \ldots, m\}.$$

(b) če je f definirana tudi v točki a, je f zvezna v točki a natanko tedaj, ko obstaja $\lim_{t \to a} f(t)$ in je

$$\lim_{t \to a} f(t) = f(a).$$

Definicija 6 *Naj bo $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^m$ vektorska funkcija in $t_0 \in \mathcal{I}$. Definirajmo:*

$$\dot{f}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Če ta limita obstaja, jo imenujemo odvod vektorske funkcije f v točki t_0.

Opomba: Tu $\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ pomeni $\frac{1}{h}\left(f(t_0 + h) - f(t_0)\right)$. Vektor deliti s skalarjem pomeni množiti ga z obratno vrednostjo tega skalarja.

Opomba: Iz odvedljivosti vektorske funkcije v t_0 seveda sledi zveznost vektorske funkcije v t_0.

Iz zgornje diskusije o limitah sledi, da je vektorska funkcija f v točki t_0 odvedljiva natanko tedaj, ko so v točki t_0 odvedljive vse njene koordinatne funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_m$, t.j. če za vsak $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ obstajajo limite

$$\dot{f}_k(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_k(t_0 + h) - f_k(t_0)}{h}.$$

Tedaj je

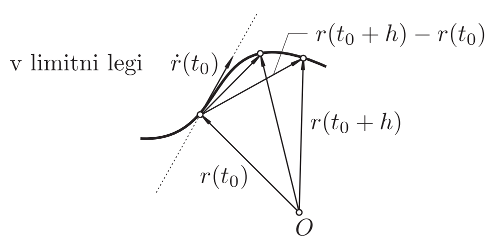
$$\dot{f}(t_0) = \big(\dot{f}_1(t_0), \dot{f}_2(t_0), \ldots, \dot{f}_m(t_0)\big).$$

Fizikalni pomen odvoda vektorske funkcije

Vektorske funkcije pogosto srečamo v fiziki. Npr. lego točke v prostoru $\mathbb{R}^3$ zapišemo s krajevnim vektorjem $r(t) = \big(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\big)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Parameter t imenujemo čas, $r_1(t) = x$, $r_2(t) = y$, $r_3(t) = z$ pa krajevne koordinate.
Odvodu krajevnega vektorja

$$\dot{r}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{r(t_0 + h) - r(t_0)}{h}$$

pravimo (vektorska) hitrost v trenutku t_0. Kvocientu $\big(r(t_0 + h) + r(t_0)\big)/h$ pa „povprečna" vektorska hitrost med trenutkoma t_0 in $t_0 + h$.



Slika 1.3: Vektor hitrosti točke v prostoru

V limitni legi ima trenutna hitrost, t.j. $\dot{r}(t_0)$, smer tangente na pot točke v trenutku t_0.

1.4.1 Diferenciabilnost in diferencial vektorske funkcije

Naj bo vektorska funkcija $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^m$ odvedljiva v točki $t_0 \in \mathcal{I}$. Tedaj je

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0) - \dot{f}(t_0)h}{h} = 0.$$

Če števec označimo z $o(h)$, lahko zgornje zapišemo kot

$$f(t_0 + h) - f(t_0) = \dot{f}(t_0)h + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0.$$

To pa pomeni, da je mogoče vektorsko funkcijo $h \mapsto f(t_0+h)-f(t_0)$ pri majhnih h dobro aproksimirati z linearno vektorsko funkcijo $h \mapsto \dot{f}(t_0)h$, t.j.

$$f(t_0+h)-f(t_0)\approx \dot{f}(t_0)h.$$

Dobro „aproksimabilnost” vektorske funkcije $h \mapsto f(t_0+h)-f(t_0)$ z linearno vektorsko funkcijo $h \mapsto \dot{f}(t_0)h$ pa imenujemo ***diferenciabilnost***.

Definicija 7 *Vektorska funkcija $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^m$ je diferenciabilna v točki t_0, če obstaja linearna vektorska funkcija $h \mapsto \mathcal{L}(h)$, ($\mathcal{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$), da je*

$$f(t_0+h)-f(t_0)=\mathcal{L}(h)+o(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$.

Opomba: Linearna vektorska funkcija $\mathcal{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ je oblike $\mathcal{L}(h)=hA$, kjer je A nek vektor iz $\mathbb{R}^m$ in $h \in \mathbb{R}$.

Izrek 7 *Naj bo $t_0 \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. Vektorska funkcija $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^m$ je v točki t_0 diferenciabilna natanko tedaj, ko je v točki t_0 odvedljiva.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Da iz odvedljivosti sledi diferenciabilnost smo že pokazali.

($\Leftarrow$) Naj bo sedaj vektorska funkcija f diferenciabilna v točki t_0. Tedaj je

$$f(t_0+h)-f(t_0)=\mathcal{L}(h)+o(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$. Linearna vektorska funkcija $\mathcal{L}$ je oblike $\mathcal{L}(h)=hA$, kjer je $A=(A_1,\ldots,A_m)$ nek vektor iz $\mathbb{R}^m$. Sledi

$$\begin{aligned}
f(t_0+h)-f(t_0)&=hA+o(h),\\
\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}&=A+\frac{o(h)}{h},\\
\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}-A&=\frac{o(h)}{h},\\
\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}-A\right)&=0,
\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}-A=0,$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}=A.$$

Torej je f odvedljiva v točki t_0 in velja

$$\dot{f}(t_0)=A.$$

$\square$

Opomba: Torej je vektorska funkcija $f:\mathcal{I}\to\mathbb{R}^m$ v točki t_0 odvedljiva natanko takrat ko je v t_0 diferenciabilna. Pri tem je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(h)&=hA\\&=h\dot{f}(t_0).\end{aligned}$$

Definicija 8 *Linearno funkcijo $\mathcal{L}$ imenujemo **diferencial funkcije** f v točki a in jo označimo z $(Df)(a)$.*

1.5 Parcialni odvodi, diferenciabilnost funkcij več spremenljivk

Naj bo $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n$ in $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ neka funkcija. Naj bo $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ notranja točka v $\mathcal{D}$ tako, da je $\mathcal{K}(a,r)\subset\mathcal{D}$ za nek $r>0$. Tedaj je

$$\begin{aligned}&f(\lambda,a_2,\ldots,a_n)\text{ definirana v }\lambda\in(a_1-r,a_1+r),\\&f(a_1,\lambda,\ldots,a_n)\text{ definirana v }\lambda\in(a_2-r,a_2+r),\\&\quad\ldots\\&f(a_1,a_2,\ldots,\lambda)\text{ definirana v }\lambda\in(a_n-r,a_n+r).\end{aligned}$$

Definicija 9 *Naj bo $k\in\{1,2,\ldots,n\}$. Če*

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{f(a_1,\ldots,a_k+\eta,\ldots,a_n)-f(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\eta}$$

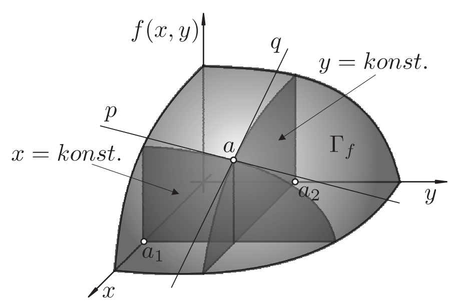
obstaja, t.j. če je funkcija

$$\lambda \mapsto f(a_1, \ldots, \lambda, \ldots, a_n)$$

odvedljiva pri $\lambda = a_k$, tedaj to limito imenujemo ***parcialni odvod funkcije*** *po k-ti spremenljivki v točki $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in jo označimo z*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \quad ali \quad f_{x_k}(a) \quad ali \quad (D_k f)(a).$$

Opomba: Parcialni odvod (če obstaja) torej izračunamo tako, da vzamemo pri odvajanju po neki spremenljivki preostale spremenljivke za konstante. Na spodnji sliki si lahko ogledamo primer, ko je $n = 2$.



Slika 1.4: Parcialni odvod funkcije f.

Naklonski koeficient premice p je $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, naklonski koeficient premice q pa je $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$.

Zgled: Naj bo f funkcija dveh spremenljivk dana s predpisom

$$f(x, y) = x^2 y^3 - \sin(xy).$$

Izračunajmo $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$. Torej

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 - y\cos(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 - x\cos(xy)$$

in

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) &= 2\cdot 1\cdot 2^3 - 2\cos(1\cdot 2)\\ &= 16 - 2\cos 2\\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) &= 3\cdot 1^2\cdot 2^2 - 1\cos(1\cdot 2)\\ &= 12 - \cos 2.\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Zgled: Naj bo f funkcija treh spremenljivk dana s predpisom

$$f(x,y,z) = x^2y^3z^4.$$

Parcialni odvodi so:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 2xy^3z^4,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 3x^2y^2z^4,\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 4x^2y^3z^3.\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Opomba: Konstantna funkcija

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv c$$

ima parcialne odvode

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0, \qquad i\in\{1,2,\ldots,n\}.$$

$\diamondsuit$

Zgled: Naj bo $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ linearna funkcija in naj bo

$$\begin{aligned}e_1 &= (1,0,\ldots,0), \quad f(e_1) = A_1,\\ e_2 &= (0,1,\ldots,0), \quad f(e_2) = A_2,\\ &\ldots\\ e_n &= (0,0,\ldots,1), \quad f(e_n) = A_n.\end{aligned}$$

Za

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_n f(e_n). \end{aligned}$$

Vsaka linearna funkcija na $\mathbb{R}^n$ je torej oblike $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n$, kjer je A nek točno določen vektor iz $\mathbb{R}^n$. Parcialni odvodi linearne funkcije so

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \equiv A_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \equiv A_2, \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \equiv A_n,$$

torej konstante, neodvisne od točke x. $\diamondsuit$

Opomba: Ker je linearna funkcija $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezna povsod, je zvezna tudi v točki 0. Tedaj za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|\mathcal{L}(x)| < \varepsilon$, čim je $\|x\| < \delta$, torej gotovo

$$(*) \qquad |\mathcal{L}(x)| < \varepsilon, \text{ če je } \|x\| = \frac{\delta}{2}.$$

Naj bo $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| = 1$. Torej je

$$\left\| \frac{\delta}{2} y \right\| = \frac{\delta}{2} \|y\| = \frac{\delta}{2}$$

in zato

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(y)| &= \left| \mathcal{L}\left(\frac{\delta}{2} \frac{2}{\delta} y \right) \right| \\ &= \frac{2}{\delta} \left| \mathcal{L}\left(\frac{\delta}{2} y \right) \right| \\ &\overset{(*)}{<} \frac{2}{\delta} \varepsilon =: C. \end{aligned}$$

Naj bo sedaj $y \neq 0$ poljuben. Tedaj je

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(y)| &= \left| \mathcal{L}\left(\|y\| \frac{y}{\|y\|} \right) \right| \\ &= \|y\| \left| \mathcal{L}\left(\frac{y}{\|y\|} \right) \right| \\ &< \|y\| C. \end{aligned}$$

Sledi, če je $\mathcal{L}$ linearen funkcional, obstaja realno število $C < \infty$, da je

$$|\mathcal{L}(y)| < C\|y\| \quad \text{za vse} \;\; y \in \mathbb{R}^n.$$

Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Če je A matrika linearne preslikave, je

$$\begin{aligned}
\|Ay\| &= \sqrt{(A_1 y)^2 + (A_2 y)^2 + \ldots + (A_m y)^2} \\
&\leq \sqrt{C_1^2\|y\|^2 + C_2^2\|y\|^2 + \ldots + C_m^2\|y\|^2} \\
&= \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_m^2}\;\; \|y\| \\
&= C\|y\|,
\end{aligned}$$

torej obstaja število $C < \infty$, da je

$$\|Ay\| \leq C\|y\| \quad \text{za vse} \;\; y \in \mathbb{R}^n.$$

To pa pomeni, da je linearna preslikava omejena.

Definicija 10 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je v notranji točki $a \in \mathcal{D}$ diferenciabilna, če obstaja taka linearna funkcija $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da je*

$$f(a+h) = f(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} o(h)/\|h\| = 0$, t.j. če obstaja vektor $A \in \mathbb{R}^n$, da je

$$f(a+h) = f(a) + A \cdot h + o(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} o(h)/\|h\| = 0$.

Opomba: Diferenciabilnost v točki a pomeni, da je pri majhnih h:

$$f(a+h) - f(a) \approx A \cdot h,$$

kjer je $A = [A_1, A_2, \ldots, A_n] \in \mathbb{R}^n$ matrika (vektor) linearne preslikave

$$\mathcal{L} : h \mapsto A \cdot h.$$

Trditev 1 *Linearna funkcija $\mathcal{L}$ (če obstaja) je enolično določena.*

Dokaz: Recimo, da obstajata dve linearni funkciji $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_2$, da je

$$f(a+h) = f(a) + \mathcal{L}_1(h) + o_1(h),$$

$$f(a+h) = f(a) + \mathcal{L}_2(h) + o_2(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} o_1(h)/\|h\| = 0$ in $\lim_{h\to 0} o_2(h)/\|h\| = 0$. Enakosti zgoraj odštejemo in dobimo

$$\mathcal{L}_1(h) - \mathcal{L}_2(h) = o(h),$$

kjer je $o(h) = o_2(h) - o_1(h)$ in $\lim_{h\to 0} o(h)/\|h\| = 0$. Torej

$$(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)(h) = o(h).$$

Ker je $h \neq 0$, lahko zapišemo

$$\frac{1}{\|h\|}(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)(h) = \frac{o(h)}{\|h\|}.$$

V limiti, ko gre h proti 0, dobimo

$$\lim_{h\to 0}(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)(h) = 0.$$

To pa je mogoče le, če je $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$. $\square$

Definicija 11 *Linearno funkcijo $\mathcal{L}$ zgoraj imenujemo **diferencial** funkcije f v točki a in jo označimo z $(Df)(a)$. Torej je*

$$f(a+h) = f(a) + (Df)(a)(h) + o(h).$$

Izrek 8 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Če je funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ v točki $a \in \mathcal{D}$ diferenciabilna, je v tej točki tudi zvezna in parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah. Komponente vektorja A so ravno parcialni odvodi.*

$$A = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right],$$

t.j. linearna funkcija $(Df)(a)$ je oblike

$$(Df)(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_2,$$

kjer je $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Torej, če je f diferenciabilna v a, je

$$f(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n)h_1 + \ldots + \\ + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n)h_n + o(h),$$

pri čemer je $\lim_{h\to 0} o(h)/\|h\| = 0$.

Dokaz: Naj bo f diferenciabilna v $a \in \mathcal{D}$, t.j.

$$f(a+h) - f(a) = \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} o(h)/\|h\| = 0$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je funkcija $\mathcal{L}$ zvezna v točki 0, obstaja $\delta > 0$, da je $|\mathcal{L}(h)| < \varepsilon/2$, čim je $\|h\| < \delta$. Po potrebi zmanjšamo δ, da je $\frac{|o(h)|}{\|h\|} < 1$, torej $|o(h)| < \|h\|$. Če δ še zmanjšamo, lahko dosežemo, da bo $|o(h)| < \varepsilon/2$, za $\|h\| < \delta$. Torej je

$$\begin{aligned} |f(a+h) - f(a)| &\leq |\mathcal{L}(h)| + |o(h)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

čim je $\|h\| < \delta$, t.j. f je zvezna v točki a.

Naprej, pišimo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(h) &= A \cdot h \\ &= A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_n h_n. \end{aligned}$$

Izberimo si h oblike $h = (h_1, 0, \ldots, 0)$. Tedaj je $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + 0^2 + \ldots + 0^2} = |h_1|$ in $\mathcal{L}(h) = A_1 h_1$. Torej

$$f(a_1 + h_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = A_1 h_1 + o(h),$$

kjer

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h_1} = 0.$$

Sledi

$$\frac{f(a_1 + h_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h_1} = A_1 + \frac{o(h)}{h_1}.$$

V limiti, ko gre h_1 proti 0, dobimo

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{f(a_1 + h_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h_1} = A_1,$$

kar pa je ravno

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) = A_1.$$

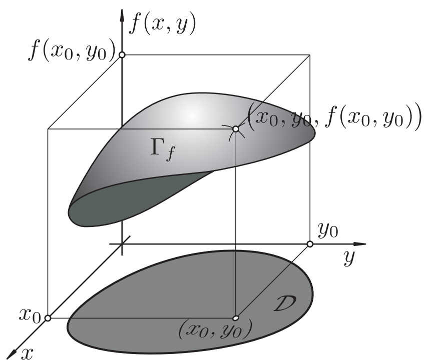
Podobno izpeljemo še za $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Pokazali smo torej

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, \ldots, a_n) = A_k, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

□

Opomba: V primeru $n = 2$ opišemo graf funkcije f z množico

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{D}\}.$$



Slika 1.5: Geometrijski prikaz v primeru, ko je $n = 2$

Afina linearna funkcija g, oblike

$$g(x, y) = A_1 x + A_2 y + B,$$

predstavlja „dvakrat” nagnjeno ravnino, ki je dvignjena za B. Določimo strmino na graf funkcije g v točki (x_0, y_0) v smeri x-osi in v smeri y-osi. V smeri x-osi se funkcija g spreminja kot funkcija samo spremenljivke x. Strmina je tako

$$\frac{d}{dx}(A_1 x + A_2 y_0 + B)\Big|_{x=x_0} = A_1.$$

Podobno velja za strmino v smeri y-osi, torej

$$\frac{d}{dy}(A_1 x_0 + A_2 y + B)\Big|_{y=y_0} = A_2.$$

Strmino bolj splošne funkcije določimo podobno kot prej, v x-smeri

$$\frac{d}{dx}[f(x, y_0)]_{x=x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

v y-smeri pa

$$\frac{d}{dy}[f(x_0, y)]_{y=y_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Funkcija f je torej diferenciabilna v točki (x_0, y_0), če je

$$\underbrace{f(x,y)}_{f(x_0+h_1,y_0+h_2)} = f(x_0,y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}_{\text{nakl. koef.}}\underbrace{(x-x_0)}_{h_1} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\text{nakl. koef.}}\underbrace{(y-y_0)}_{h_2} + \\ + o\big(\underbrace{(x-x_0, y-y_0)}_{h}\big).$$

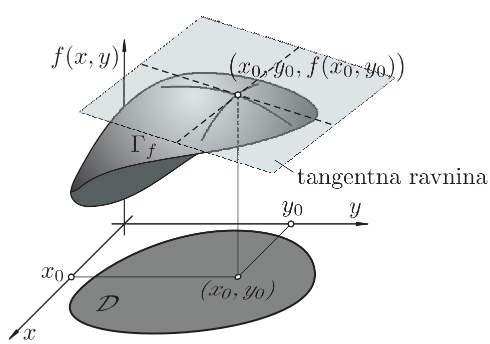
Torej je

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Kar pomeni, da smo graf funkcije f, blizu točke $\big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big)$, dobro aproskimirali z ravnino, ki jo določa enačba

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

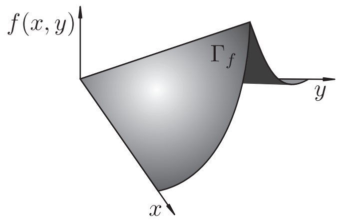
Tej ravnini pravimo tudi ***tangentna ravnina*** na graf funkcije f v točki (x_0, y_0).



Slika 1.6: Tangentna ravnina na graf funkcije f v točki (x_0, y_0)

Opomba: V naslednjem zgledu lahko vidimo, da iz zveznosti funkcije f in obstoja parcialnih odvodov $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ v splošnem ne sledi diferenciabilnost funkcije f v točki (x_0, y_0).

Zgled: Oglejmo si naslednjo sliko.



Slika 1.7: Funkcija f je v točki $(0,0)$ zvezna in parcialno odvedljiva

Funkcija f je zvezna povsod, parcialna odvoda v točki $(0,0)$ obstajata in sta oba enaka 0. Enačba ravnine, ki bi morala aproksimirati f, če bi bila f diferenciabilna, bi bila:

$$f(x,y) = 0 + 0(x-0) + 0(y-0) \equiv 0,$$

torej

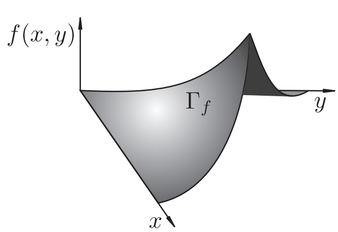
$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) + o(x-0,y-0),$$

kjer je

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{o(x-0,y-0)}{|x-0,y-0|}.$$

Dobimo torej $f(x,y) = o(x,y)$, kar seveda pomeni, da f ni diferenciabilna. $\Diamond$

Opomba: Če bi bila funkcija f oblike, kot kaže spodnja slika, bi bila tudi diferenciabilna v točki $(0,0)$.



Slika 1.8: Funkcija f je v točki $(0,0)$ diferenciabilna

Izrek 9 *Naj bo funkcija f v okolici točke $a \in \mathbb{R}^n$ parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah in parcialni odvodi naj bodo v točki a zvezne funkcije. Tedaj je f v a diferenciabilna.*

Dokaz: Dokazali bomo za primer $n = 2$. Naj bo f odvedljiva po x in y v okolici točke (a, b) in naj bosta parcialna odvoda f_x in f_y zvezna v točki (a, b). Naj bo

$$I = f(a + h, b + k) - f(a, b).$$

Pri tem sta h in k dovolj majhna, da je $(a + h, b + k)$ v omenjeni okolici. Torej

$$I = \big(f(a + h, b + k) - f(a, b + k)\big) + \big(f(a, b + k) - f(a, b)\big)$$

Za vsakega od oklepajev uporabimo Lagrangeov izrek. Tako je

$$I = hf_x(\tilde{x}, b + k) + kf_y(a, \tilde{y}),$$

kjer je $\tilde{x}$ med a in $a + h$ ter $\tilde{y}$ med b in $b + k$. Ker sta po predpostavki f_x in f_y zvezna v (a, b), sta $f_x(\tilde{x}, b + k)$ in $f_x(a, b)$ oziroma $f_y(a, \tilde{y})$ in $f_y(a, b)$ poljubno blizu, če sta le h in k dovolj majhna, saj je $\tilde{x}$ med a in $a + h$ ter $\tilde{y}$ med b in $b + k$. Pišimo

$$\begin{aligned} f_x(\tilde{x}, b + k) &= f_x(a, b) + \eta_1, \\ f_y(a, \tilde{y}) &= f_y(a, b) + \eta_2. \end{aligned}$$

Torej sta η_1 in η_2 poljubno majhna, če je le $\sqrt{h^2 + k^2}$ dovolj majhen oz. za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|\eta_1| < \varepsilon$ in $|\eta_2| < \varepsilon$, čim je $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$.

Iz enakosti zgoraj dobimo

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = hf_x(a, b) + h\eta_1 + kf_y(a, b) + k\eta_2.$$

Pišimo $o(h, k) = h\eta_1 + k\eta_2$, torej

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + o(h, k)$$

Če je $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$, je

$$\begin{aligned} \frac{|o(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} &\le \frac{\varepsilon|h| + \varepsilon|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \varepsilon\frac{|h| + |k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &< 2\varepsilon, \end{aligned}$$

saj je

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} < 1 \quad \text{in} \quad \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} < 1,$$

od koder sledi, da je

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{o(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Torej

$$f\big((a,b)+(h_1,h_2)\big) = f(a,b) + \mathcal{L}(h_1,h_2) + o(h_1,h_2),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} \frac{o(h_1,h_2)}{\|h\|}$. Torej je f diferenciabilna v točki (a,b). □

Opomba: Od tod sledi, da so polinomi diferenciabilni v vsaki točki, saj so njihovi parcialni odvodi spet polinomi, torej zvezni v vsaki točki.

1.5.1 Parcialni odvodi višjega reda

Naj bo f funkcija, definirana na odprti množici $\mathcal{D}$ in naj ima v vsaki točki iz $\mathcal{D}$ definirane parcialne odvode

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad j \in \{1,2,\ldots,n\},$$

ki so seveda spet funkcije. Če so te funkcije spet naprej odvedljive v vsaki točki, potem lahko izračunamo

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right), \quad \text{za } \ j \in \{1,2,\ldots,n\}, \ \ k \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Če so te funkcije spet odvedljive, potem lahko izračunamo ...

Zgled: Parcialna odvoda funkcije f, ki je dana s predpisom

$$f(x,y) = x^2y^3 + 3x^4y^2,$$

sta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 + 12x^3y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 + 6x^4y.$$

Če še enkrat parcialno odvajamo, dobimo štiri parcialne odvode drugega reda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) &= 2y^3 + 36x^2y^2 \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) &= 6xy^2 + 24x^3y \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) &= 6xy^2 + 24x^3y \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) &= 6x^2y + 6x^4.
\end{aligned}$$

◊

Opomba: Parcialne odvode višjega reda ponavadi označimo:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$

ali

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = D_k D_j f, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \;\; D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$$

ali

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = f_{x_k x_j}$$

Če obstajajo odvodi tudi višjih redov, lahko v splošnem zapišemo

$$D_{k_1} D_{k_2} \ldots D_{k_p} = \frac{\partial^p}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_p}}.$$

Po dogovoru odvajamo z *desne strani*, t.j. najprej po x_{k_p}, potem po $x_{k_{l-1}}$, ...

Zgled: Določimo $\frac{\partial^3 f}{\partial^2 y \partial x}(x,y)$ za

$$f(x,y) = x^7 y^{20}.$$

Torej

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 f}{\partial^2 y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial^2 y}(7y^6 y^{20}) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(140x^6 20y^{19}) \\
&= 140 \cdot 19x^6 y^{18}.
\end{aligned}$$

◊

Opomba: V enem od zgornjih zgledov smo opazili, da je

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

za vse (x, y) iz definicijskega območja. Velja to morda to tudi v splošnem?

Izrek 10 *Naj bo funkcija f v okolici točke $a \in \mathbb{R}^n$ parcialno odvedljiva po spremenljivkah x_j in x_k in naj bosta parcialna odvoda $D_j f$ in $D_k f$ v okolici točke a zvezna. Naj v tej okolici obstajata tudi $D_k D_j f$ in $D_j D_k f$ in naj bosta zvezna v točki a. Tedaj sta ta odvoda v točki a enaka, torej*

$$\big(D_k D_j f\big)(a) = \big(D_j D_k f\big)(a).$$

Dokaz: Dovolj je, da izrek dokažemo na primeru funkcije dveh spremenljivk, saj pri odvajanju vzamemo vse druge spremenljivke za konstante. Naj bo torej f funkcija dveh spremenljivk. Naj bo f v okolici točke (a, b) parcialno odvedljiva po x in po y. Odvoda f_x in f_y naj bosta v tej okolici zvezna. Poleg tega naj bo f_x v tej okolici parcialno odvedljiva po y in f_y v tej okolici parcialno odvedljiva po x. Odvoda, t.j. f_{xy} in f_{yx} naj bosta zvezni funkciji v (a, b). Dokazati moramo, da je $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. Naj bo

$$J = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b).$$

Pri tem sta h in k tako majhna, da je $(a + h, b + k)$ vedno v predpisani okolici. Naj bo

$$g(x) = f(x, b + k) - f(x, b).$$

Tako je

$$J = g(a + h) - g(a).$$

Po predpostavki je g odvedljiva po x. Po Lagrangeovem izreku je

$$J = g'(\widehat{x})h,$$

kjer je $\widehat{x}$ med a in $a + h$, t.j.

$$J = hf_x(\widehat{x}, b + k) - hf_x(\widehat{x}, b).$$

Še enkrat uporabimo Lagrangeov izrek (to lahko, saj f_{yx} obstaja). Dobimo

$$(*) \qquad J = f_{yx}(\widehat{x}, \widehat{y})hk,$$

kjer je $\widehat{x}$ med a in $a+h$ in $\widehat{y}$ med b in $b+k$.

Naj bo

$$h(y) = f(a+h, y) - f(a, y).$$

Tako je

$$J = h(b+k) - h(b).$$

Kot prej, dvakrat uporabimo Lagrangeov izrek in dobimo

$$(**) \qquad J = f_{xy}(\tilde{x}, \tilde{y})kh,$$

kjer je $\tilde{x}$ med a in $a+h$ ter $\tilde{y}$ med b in $b+k$. Privzeli bomo, da sta h in k oba hkrati različna od 0, t.j. $hk \neq 0$. Iz $(*)$ in $(**)$ sledi

$$f_{yx}(\widehat{x}, \widehat{y})hk = f_{xy}(\tilde{x}, \tilde{y})hk.$$

Torej

$$(***) \qquad f_{yx}(\widehat{x}, \widehat{y}) = f_{xy}(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

saj $hk \neq 0$. Izraz $(***)$ velja za vsaka $hk \neq 0$ in $\sqrt{h^2+k^2}$ dovolj majhen. Za druga h in k bosta $\widehat{x}, \widehat{y}$ in $\tilde{x}, \tilde{y}$ drugačna. Pri $h \to 0$ in $k \to 0$, gre $(\widehat{x}, \widehat{y}) \to (a, b)$ in $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to (a, b)$. Zaradi zveznosti f_{yx} v točki (a, b), je

$$\lim_{h,k \to 0} f_{yx}(\widehat{x}, \widehat{y}) = f_{yx}(a, b).$$

Zaradi zveznosti f_{xy} v točki (a, b) je

$$\lim_{h,k \to 0} f_{xy}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f_{xy}(a, b).$$

Od tod torej sledi

$$f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b).$$

$\square$

Definicija 12 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica. Z oznako $\mathcal{C}^k(\mathcal{D})$ označimo prostor vseh funkcij na $\mathcal{D}$, ki imajo zvezne vse parcialne odvode, do vključno reda k.*

Opomba: $\mathcal{C}^k(\mathcal{D})$ je linearen prostor, operatorji odvajanja do reda k so linearni in pri mešanih odvodih ni pomemben vrstni red odvajanja.

1.6 Diferenciabilnost preslikav z (odprtih množic) $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $a \in \mathcal{D}$ notranja točka. Če se da f v okolici točke a dobro aproksimirati z linearno preslikavo pravimo, je f v točki a diferenciabilna:

Definicija 13 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica. Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ je v točki $a \in \mathcal{D}$ diferenciabilna, če obstaja linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da je*

$$f(a+h) = f(a) + \mathcal{A}(h) + o(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} o(h)/\|h\| = 0.$

Opomba: V posebnem primeru, ko je preslikava $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna, je

$$f(a+h) = f(a) + f(h);$$

ker je f linearna je torej $(Df)(a) = f$ za vsako točko a. (Linearna preslikava, ki dano linearno preslikavo najbolje aproksimira, je kar preslikava sama)

Opomba: Podobno kot pri funkcijah ($m = 1$) dokažemo, da je v tem primeru linearna preslikava $\mathcal{A}$ enolično določena. Imenujemo jo diferencial preslikave f v točki a in jo označimo z $(Df)(a)$. Torej je

$$f(a+h) = f(a) + (Df)(a)(h) + o(h).$$

Opomba: Linearne preslikave bomo obravnavali vedno v kanoničnih bazah na $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je tedaj enolično določena z matriko reda $m \times n$, ki jo označimo z A. (Spomnimo se, da se linearna preslikava izrazi z drugo matriko, če bazo spremenimo.)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

Če je

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix},$$

je

$$\begin{aligned} Ah &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}h_1 + A_{12}h_2 + \ldots + A_{1n}h_n \\ A_{21}h_1 + A_{22}h_2 + \ldots + A_{2n}h_n \\ \vdots \\ A_{m1}h_1 + A_{m2}h_2 + \ldots + A_{mn}h_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ ima m-komponentnih funkcij, t.j. $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Naj bo f diferenciabilna v točki a. Tedaj iz definicije diferenciabilnosti sledi

$$f(a+h) = f(a) + Ah + o(h).$$

Če zadnjo enakost razpišemo po komponentah, dobimo

$$f_1(a+h) = f_1(a) + A_1 h + o_1(h)$$

$$f_2(a+h) = f_2(a) + A_2 h + o_2(h)$$

$$\dots$$

$$f_m(a+h) = f_m(a) + A_m h + o_m(h),$$

kjer je $A_j = [A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jn}]$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ in $\lim_{h\to 0} o(h)/\|h\| = 0$. Ker je $|o_j(h)| < \|o(h)\|$, za vsak j, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, je tudi $\lim_{h\to 0} o_j(h)/\|h\| = 0$. Iz j-te vrstice zgornjega sistema enačb sledi, da je j-ta koordinatna funkcija diferenciabilna v točki a, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Izrek 11 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Naj bo $a \in \mathcal{D}$ notranja točka. Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ je diferenciabilna natanko tedaj, ko so v točki a diferenciabilne vse njene koordinatne funkcije.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Smo že dokazali v diskusiji zgoraj.

($\Leftarrow$) Recimo, da so v točki a diferenciabilne vse koordinatne funkcije $f_1, f_2, \dots, f_m$. Torej velja

$$f_k(a+h) = f_k(a) + A_k h + o_k(h),$$

kjer $A_k = [A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kn}]$, $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ in $\lim_{h\to 0} o_k(h)/\|h\| = 0$, za vsak $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Zgornje zapišemo v matrični obliki

$$f(a+h) = f(a) + Ah + o(h).$$

Ker je $o(h) = [o_1(h), o_2(h), \dots, o_m(h)]^T$ in je $\lim_{h\to 0} o_k(h)/\|h\| = 0$ za vsak $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, je tudi

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \sqrt{\frac{o_1(h)^2}{\|h\|^2} + \frac{o_2(h)^2}{\|h\|^2} + \dots + \frac{o_m(h)^2}{\|h\|^2}} = 0.$$

Torej je f res diferenciabilna v točki a. $\square$

Diskusija: Kaj so pravzaprav števila A_{ij} v matriki A? Za funkcije (t.j. v primeru $m = 1$) to že vemo. Npr. če $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ in $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ diferenciabilna v točki a, je

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right] \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} + o(h) \\
&= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) h_n + o(h).
\end{aligned}
$$

V primeru $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ je matrika A podana:

$$
A = \begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\
\vdots & & \ddots & \\
\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)
\end{bmatrix}.
$$

Opomba: Zgornjo matriko imenujemo tudi ***Jacobijeva matrika***.

Opomba: Torej, če je prelikava $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ diferenciabilna v točki a, je

$$
f(a+h) = f(a) + (Df)(a)h + o(h),
$$

kjer je $\lim_{h \to 0} o(h)/\|h\| = 0$. Pri tem je diferencial funkcije f v točki a, v kanoničnih bazah na $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, podan z zgornjo matriko parcialnih odvodov

$$
(Df)(a) = \begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\
\vdots & & \ddots & \\
\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)
\end{bmatrix}.
$$

Kot linearno preslikavo $(Df)(a)$ identificiramo z Jacobijevo matriko. Če je

$$
h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix},
$$

dobimo torej

$$f(a+h) = f(a) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + o(h).$$

Posledica 1 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ preslikava in $a \in \mathcal{D}$ notranja točka. Če v okolici točke a vsi parcialni odvodi vseh koordinatnih funkcij preslikave f obstajajo in so v a zvezni, tedaj je vsaka koordinatna funkcija diferenciabilna. Torej je po prejšnjem izreku f diferenciabilna v a.*

1.6.1 Diferenciabilnost kompozicije preslikav

Izrek 12 (o diferenciabilnosti kompozicije) *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^m$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ diferenciabilna v notranji točki $a \in \mathcal{D}$ in $f(a) = b \in \mathcal{D}'$ naj bo notranja točka iz $\mathcal{D}'$. Naj bo $g : \mathcal{D}' \to \mathbb{R}^p$ preslikava, ki je diferenciabilna v točki b. Tedaj je kompozicija $F = g \circ f$ diferenciabilna v točki a in velja*

$$(DF)(a) = (Dg)\big(f(a)\big) \circ (Df)(a).$$

Opomba: Torej je diferencial kompozicije enak kopoziciji diferencialov. Če imamo v prostorih $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ in v $\mathbb{R}^p$ *kot ponavadi* kanonične baze fiksirane, potem se $(Df)(a)$ izraža z Jacobijevo matriko reda $m \times n$, ki jo običajno označimo kar z istim simbolom in $(Dg)\big(f(a)\big)$ z Jacobijevo matriko reda $p \times m$, ki jo običajno označimo kar z istim simbolom. Tedaj lahko znak $\circ$ razumemo kot operacijo matričnega produkta. V tem primeru je, če koordinate v $\mathbb{R}^m$ označimo z $y_1, \ldots, y_m$,

$$(Dg)\big(f(a)\big) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\big(f(a)\big) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\big(f(a)\big) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}\big(f(a)\big) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\big(f(a)\big) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}\big(f(a)\big) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m}\big(f(a)\big) \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}\big(f(a)\big) & \frac{\partial g_p}{\partial y_2}\big(f(a)\big) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}\big(f(a)\big) \end{bmatrix},$$

$$(Df)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}.$$

Zgornji izrek torej pove, da je matrika $(DF)(a)$ enaka produktu matrik zgoraj, t.j.

$$(DF)(a) = (Dg)\big(f(a)\big) \cdot (Df)(a)$$

Dokaz: Naj bo

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$$

$$x \overset{f}{\longmapsto} Ax \overset{g}{\longmapsto} (BA)x, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$a \mapsto f(a) = b \mapsto g(b)$$

$$a \mapsto g(b).$$

Po predpostavki je f diferenciabilna v a in g diferenciabilna v $f(a) = b$, zato

$$f(a+h) = f(a) + (Df)(a)(h) + o(h),$$

$$g(b+k) = g(b) + (Dg)(b)(k) + o(k),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} o(h)/\|h\| = 0$ in $\lim_{k\to 0} o(k)/\|k\| = 0$. Naj bo $k = f(a+h) - f(a)$. Ker je $f(a) = b$, je $b + k = f(a+h)$.

$$\begin{aligned} g\big(f(a+h)\big) &= g\big(f(a)\big) + (Dg)(b)\big(f(a+h) - f(a)\big) + o\big(f(a+h) - f(a)\big) \\ &= g\big(f(a)\big) + (Dg)(b)\big((Df)(a)(h) + o(h)\big) + o\big((Df)(a)(h) + o(h)\big) \\ &= g\big(f(a)\big) + (Dg)(b)\big((Df)(a)(h)\big) + \\ &\qquad + \underbrace{(Dg)(b)\big(o(h)\big) + o\big((Df)(a)(h) + o(h)\big)}_{(\dagger)} \end{aligned}$$

Oglejmo si zadnja dva člena v zgornji enačbi, t.j. $(\dagger)$. Ker sta $(Dg)(b)$ in $(Df)(a)$ linearni preslikavi vemo, da obstaja realno število $c < \infty$, da je

$$\big\|(Dg)(b)\big(o(h)\big)\big\| \leq c\|o(h)\|$$

in realno število $d < \infty$, da je

$$\|(Df)(a)(h)\| \leq d\|h\|.$$

Sledi, da je

$$\| \, (\dagger) \, \| \leq c\|o(h)\| + \|o\big((Df)(a)(h) + o(h)\big)\|.$$

Pri tem je

$$\begin{aligned} \|(Df)(a)(h) + o(h)\| &\leq d\|h\| + s\|h\|, \quad s < \infty \\ &\leq t\|h\|, \quad t < \infty, \end{aligned}$$

saj je $\lim_{h\to 0} o(h)/\|h\| = 0$. Od tod sledi

$$(\dagger) = o(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} o(h)/\|h\| = 0$. Torej

$$F(a+h) = F(a) + \big((Dg)(b) \circ (Df)(a)\big)(h) + o(h)$$

za $F = g \circ f$, kjer je $\lim_{h\to 0} o(h)/\|h\| = 0$. Torej je $F = g \circ f$ res diferenciabilna in velja

$$(DF)(a) = (Dg)(b) \circ (Df)(a).$$

$\square$

Opomba: V primeru, ko je $p = 1$, je

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1}(a) &= \frac{\partial g}{\partial u_1}\big(u(a)\big)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(a) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial u_m}\big(u(a)\big)\frac{\partial u_m}{\partial x_1}(a) \\ &\cdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(a) &= \frac{\partial g}{\partial u_1}\big(u(a)\big)\frac{\partial u_1}{\partial x_n}(a) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial u_m}\big(u(a)\big)\frac{\partial u_m}{\partial x_n}(a), \end{aligned}$$

kjer je $u(a) = \big(u_1(a), u_2(a), \ldots, u_m(a)\big)$ oziroma

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(a)\right] = \left[\frac{\partial g}{\partial u_1}\big(u(a)\big), \ldots, \frac{\partial g}{\partial u_m}\big(u(a)\big)\right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}.$$

Opomba: Če imamo $n = 1$ in $m = 1$, dobimo že znano formulo iz Analize I, za kompozicijo funkcij ene spremenljivke, t.j.

$$\frac{dF}{dx}(a) = \frac{dg}{du}\big(u(a)\big)\frac{du}{dx}(a),$$

pri čemer je $F = g \circ f$.

Zgled: Neposredno iz formule za odvod kompozicije funkcij izračunaj $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ in $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$, če je

$$F(x, y) = (3x^2 + 2y)^3(4x + 5y^2) - (3x^2 + 2y)(4x + 5y^2)^2 - x^4y^4,$$

$$g(u_1, u_2, u_3) = u_1^3u_2 - u_1u_2^2 - u_3^4$$

in

$$u_1 = 3x^2 + 2y$$

$$u_2 = 4x + 5y^2$$

$$u_3 = xy.$$

Iz formul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial y}$$

sledi:

$$\frac{\partial g}{\partial u_1} = 3u_1^2u_2 - u_2^4, \quad \frac{\partial g}{\partial u_2} = u_1^3 - 4u_1u_2^3, \quad \frac{\partial g}{\partial u_3} = -4u_3^3,$$

in

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = 4, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x} = y,$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 10y, \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} = x.$$

Torej

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = (3u_1^2u_2 - u_2^4)6x + (u_1^3 - 4u_1u_2^3)4 - 4u_3^3y$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = (3u_1^2u_2 - u_2^4)2 + (u_1^3 - 4u_1u_2^3)10y - 4u_3^3x.$$

V zgornji enakosti vstavimo še $u_1 = 3x^2 + 2y$, $u_2 = 4x + 5y^2$, $u_3 = xy$ in dobimo iskani rezultat. $\Diamond$

1.7 Izrek o inverzni preslikavi

Glavni motiv je reševanje sistemov *nelinearnih* enačb. Iz linearne algebre npr. vemo, da za vsak par a, b obstaja natanko en par x, y, ki reši linearen sistem enačb

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= a \\ 2x - y &= b, \end{aligned}$$

saj je

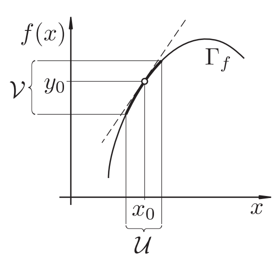
$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = -7 \neq 0.$$

Vprašanje pa je, kako bi rešili naslednji sistem enačb?

$$\begin{aligned} 3x + 2y + x^2 &= a \\ 2x - y + 3y^2 &= b. \end{aligned}$$

Iz izrekov spodaj bomo videli, da je za a, b, ki sta blizu 0, sistem enačb enolično rešljiv.

Vzmemimo npr. nelinearno zvezno odvedljivo funkcijo. Naj bo x_0 takšna točka, da je $f'(x_0) \neq 0$. Pišimo $f(x_0) = y_0$.



Slika 1.9: Izrek o inverzni preslikavi

Vprašanje je, ali je enačba $y = f(x)$ za x blizu x_0 ($x \in \mathcal{U}$) in y blizu y_0 ($y \in \mathcal{V}$) mogoče razrešiti na y, t.j. ali lokalno obstaja inverzna funkcija? Če obstaja, ali je odvedljiva? To nam pove naslednji izrek.

Izrek 13 (o inverzni preslikavi) *Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ odprta množica in $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ prelikava razreda $\mathcal{C}^1$, t.j. vsi parcialni odvodi prvega reda vseh koordinatnih funkcij preslikave f so zvezne na Ω. Naj bo $a \in \Omega$ in naj bo $(Df)(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ izomorfizem. Tedaj obstajata okolica $\mathcal{U}$ točke a in okolica $\mathcal{V}$ točke $f(a)$ taki, da je $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ difeomorfizem, t.j. bijektivna preslikava, katere inverz $(f|_{\mathcal{U}})^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ je diferenciabilen v vsaki točki iz $\mathcal{V}$.*

Opomba: Linearna preslikava $(Df)(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ je izomorfizem natanko tedaj, ko je $\det\big((Df)(a)\big) \neq 0$.

Opomba: (Formula za odvod inverza) Naj bo $f|_{\mathcal{U}}$ kot v izreku zgoraj in naj bo $y = f(x)$. Ker je

$$(f|_{\mathcal{U}}) \circ (f|_{\mathcal{U}})^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$$
$$\big(D(f|_{\mathcal{U}})\big)(x) \circ \Big(D\big((f|_{\mathcal{U}})^{-1}\big)\Big)(y) = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}\,.$$

Torej je

$$\Big(D\big((f|_{\mathcal{U}})^{-1}\big)\Big)(y) = \big(D(f|_{\mathcal{U}})(x)\big)^{-1}.$$

Od tod med drugim sledi, da je $(f|_{\mathcal{U}})^{-1}$ tudi razreda $\mathcal{C}^1$.

Opomba: Za $m = 1$ zgornji izrek pove naslednje: Naj bo f definirana v okolici točke a in v tej okolici razreda $\mathcal{C}^1$. Če je odvod funkcije f v točki a različen od 0, tedaj obstajata okolica $\mathcal{U}$ točke a in okolica $\mathcal{V}$ točke $f(a)$, da je $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ difeomorfizem, t.j. $f|_{\mathcal{U}}$ je bijekcija in $(f|_{\mathcal{U}})^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ je diferenciabilna. Še več, $(f|_{\mathcal{U}})^{-1}$ je razreda $\mathcal{C}^1$. Z drugimi besedami: pri pogojih $x \in \mathcal{U}$ in $y \in \mathcal{V}$ se da enačbo $y = f(x)$ razrešiti na x, t.j. $x = \varphi(y)$, kjer je $\varphi = (f|_{\mathcal{U}})^{-1}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1$.

Opomba: Pri več spremenljivkah se pogoj $f'(a) \neq 0$ nadomesti s pogojem

$$\det\big((Df)(a)\big) \neq 0.$$

Dokaz: (i) Skica dokaza za $m = 1$. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo $a = f(a) = 0$, $f \in \mathcal{C}^1$ in $f'(a) = 1$. Oglejmo si $g(x) = f(x) - x$. Sledi

$g'(0) = f'(0) - 1 = 1 - 1 = 0$. Zato zaradi zveznosti g' obstaja okolica $\mathcal{W} := \{x : |x| < r, r > 0\}$ točke 0, da je $|g'(x)| < \frac{1}{2}$ za vse $x \in \mathcal{W}$.

Če sta $x, y \in \mathcal{W}$, je po Lagrangeovem izreku

$$g(x) - g(y) = g'(\xi)(x - y),$$

kjer je ξ med x in y. Ker je $|g'(\xi)| < \frac{1}{2}$, sledi

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y| \qquad (x, y \in \mathcal{W}).$$

Sledi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|x - y| &\geq |f(x) - x - f(y) + y| \\ &\geq |x - y| - |f(x) - f(y)| \end{aligned}$$

in

$$|f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{2}|x - y| \qquad (x, y \in \mathcal{W}),$$

to pa pomeni, da je f injektivna na $\mathcal{W}$.

Kako bi za dani y izračunali $f^{-1}(y)$? Ideja: za dani y z iteracijo, $x_n = y - g(x_{n-1})$. Če zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k x, v limiti dobimo $x = y - g(x) = y - f(x) + x$, torej $y = f(x)$.

Kako doseči konvergenco? Uporabimo dejstvo, da je g skrčitev, t.j. $|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$. Zato iz enakosti $x_n = y - g(x_{n-1})$ in $x_{n+1} = y - g(x_n)$, če ju odštejemo, sledi

$$\left.\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |g(x_n) - g(x_{n-1})| \\ &\leq \tfrac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|. \end{aligned}\right\} (*)$$

Če to velja za vsak dovolj velik n, bo zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyevo in zato konvergentno (glej Banachovo skrčitveno načelo). Zapišimo

$$x_n = x_1 - (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}).$$

Vrsta

$$x_1 - (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots$$

je majorizirana s potenčno vrsto

$$|x_1| + |x_2 - x_1| \cdot \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\right),$$

zato njene delne vsote konvergirajo. Da velja $(*)$ za vsak n, mora biti še $x_n \in \mathcal{W}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. To dosežemo tako, da se omejimo na $|y| < r/2$ in postavimo $x_0 = 0$. Potem je $x_1 = y - g(x_0) = y - g(0) = y$. Od tod sledi $|x_1| < r/2$ in zato $x_1 \in \mathcal{W}$. Podobno sklepamo naprej;

$$|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_0|,$$

$$|x_2| \leq |x_1| + |x_2 - x_1| < \frac{r}{2} + \frac{r}{4} < r,$$

torej $x_2 \in \mathcal{W}$. Od sledi, da so vsi x_n vsebovani v okolici $\mathcal{W}$.

(ii) Dokaz v primeru $m > 1$. Dokazati izrek za preslikavo f v točki a je isto kot dokazati izrek za preslikavo

$$x \mapsto F(x) = \big((Df)(a)\big)^{-1}\big(f(a+x) - f(a)\big)$$

v točki $x = 0$. Za preslikavo F pa velja $F(0) = 0$ in $(DF)(0) = I$ (kjer je I identiteta oz. enotska matrika). Torej lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da je $f(0) = 0$ in $(Df)(0) = I$. Kot v zgornji skici dokaza za eno spremenljivko definirajmo $g(x) = f(x) - x$. Jasno je, da je $(Dg)(0) = (Df)(0) - I = I - I = 0$, t.j. ničelna matrika. Če sta $x, y \in \Omega$ in daljica s krajiščema v x in y vsa v Ω, je preslikava ψ, ki je dana s predpisom $\psi(t) = g\big(x + t(y-x)\big)$, zvezno diferenciabilna vektorska funkcija na $t \in [0,1]$, saj je kompozicija dveh zvezno diferenciabilnih preslikav, t.j. vektorske funkcije $t \mapsto x + t(y-x)$ in preslikave g. Torej

$$\psi(t) = \Big(g_1\big(x + t(y-x)\big), g_2\big(x + t(y-x)\big), \ldots, g_m\big(x + t(y-x)\big)\Big),$$

kjer so $g_1, g_2, \ldots, g_m$ koordinatne funkcije. Za vsak $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ velja

$$\begin{aligned}
g_j(y) - g_j(x) &= \psi_j(1) - \psi_j(0) \\
&= \int_0^1 \psi_j'(t)dt \\
&= \int_0^1 (Dg_j)\big(x + t(y-x)\big)(y-x)dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial x_k}\big(x + t(y-x)\big)(y_k - x_k)dt.
\end{aligned}$$

Ker je $(Dg)(0) = 0$, so vsi parcialni odvodi vseh koordinatnih funkcij preslikave g v točki 0 enaki 0. Ker so po predpostavki zvezni, lahko najdemo $r > 0$, da bo

$$\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right| < \frac{1}{2m} \quad \text{za vsak } \; x \in \mathbb{R}^m, \quad \|x\| < r$$

in za vsaka $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Če je torej $\|x\| < r$, $\|y\| < r$, je tudi daljica s krajiščema v točkah x in y vedno vsebovana v krogli $\mathcal{B}(0, r)$. Zato

$$\begin{aligned}
|g_j(y) - g_j(x)| &= \left|\int_0^1 \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial x_k}\big(x + t(y - x)\big)(y_k - x_k)dt\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^m \int_0^1 \frac{1}{2m}|y_k - x_k|dt \\
&= \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^m |y_k - x_k| \\
&\overset{\dagger}{\leq} \frac{1}{2m}\sqrt{\sum_{k=1}^m (y_k - x_k)^2}\sqrt{m}
\end{aligned}$$

(† sledi iz Cauchy-Schwartzove neenakosti). Torej je

$$\big(g_j(y) - g_j(x)\big)^2 \leq \frac{1}{4m}(y - x)^2 \quad \text{za vsak } \; j \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

oziroma

$$\begin{aligned}
\big(g(y) - g(x)\big)^2 &= \sum_{k=1}^m \big(g_j(y) - g_j(x)\big)^2 \\
&\leq \frac{1}{4m}(y - x)^2 m \\
&= \frac{1}{4}(y - x)^2.
\end{aligned}$$

Torej je

$$\|g(y) - g(x)\| \leq \frac{1}{2}\|y - x\|$$

za vsaka $\|x\| < r$, $\|y\| < r$. Po potrebi r še zmanjšamo, da je

- $\{x : \|x\| < r\} \subset \Omega$
- $(Df)(x)$ je izomorfizem za vsak x, $\|x\| < r$
- $\|g(y) - g(x)\| \leq \frac{1}{2}\|y - x\|$ za vsak $\|x\| < r$ in vsak $\|y\| < r$.

To lahko naredimo:

$$(Df)(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix}.$$

Po predpostavki je $(Df)(0) = I$, torej

$$(Df)(0) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Očitno je $\det\big((Df)(0)\big) = 1 \neq 0$. Funkcija $x \mapsto \det\big((Df)(x)\big)$ je zvezna, saj so vsi elementi matrike, t.j. parcialni odvodi, tudi zvezne funkcije. Ker je $\det\big((Df)(0)\big) \neq 0$, obstaja $\eta > 0$, da iz $\|x\| < \eta$ sledi $\det\big((Df)(x)\big) \neq 0$.

Ker je $\|g(y) - g(x)\| \leq \frac{1}{2}\|y - x\|$ za vsaka x, y, $\|x\| < r$, $\|y\| < r$, enako kot v dokazu pri $n = 1$ pokažemo, da je f injektivna na $\{x : \|x\| < r\}$.

Naj bo $g(x) = f(x) - x$. Naj bo y dan. Z iteracijo dobimo $x_n = y - g(x_{n-1})$. Če $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira proti x, bo v limiti $x = y - g(x) = y - f(x) + x$ oz. $y = f(x)$. Naj bo $y \in \mathbb{R}^m$ in $\|y\| < \frac{r}{2}$. Naj bo $x_0 = 0$. Tedaj je $x_1 = y - g(0) = y$, torej $\|x_1\| < r/2$. Računamo naprej;

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| &= \|y - g(x_1) - y + g(x_0)\| \\ &\leq \|g(x_1) - g(x_0)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x_1\| \\ &< \frac{r}{4} \\ &\dots \\ \|x_n\| &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2^2} + \ldots + \frac{r}{2^n} < r, \end{aligned}$$

torej

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_0\| &< \frac{r}{2} \\ \|x_2 - x_1\| &< \frac{r}{4} \\ &\dots \\ \|x_n - x_{n-1}\| &< \frac{r}{2^n}. \end{aligned}$$

Zaporedje je Cauchyevo, vsi členi zaporedja $\|x_n\| < r$, torej za g neenakost velja. Zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k x in v limiti velja $f(x) = y$. Torej za vsak y, za katerega je $\|y\| < r/2$, obstaja x, da je $y = f(x)$. Tak x je en sam, saj če bi bila dva, bi namreč za $x = y - g(x)$ in $\tilde{x} = y - g(\tilde{x})$ veljalo

$$
\begin{aligned}
\|x - \tilde{x}\| &= \|g(x) - g(\tilde{x})\| \\
&\le \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|,
\end{aligned}
$$

od koder pa sledi $x = \tilde{x}$. Dobljen x zadošča neenakosti $\|x\| < r$.

Tako vidimo, če ponovimo sklepanje za ρ, $0 < \rho \le r$, da za vsak y, $\|y\| < \rho/2$, obstaja natanko en x, $\|x\| < \rho$, da je $f(x) = y$. Definirajmo

$$\mathcal{V} := \{y : \|y\| < r/2\}.$$

$\mathcal{V}$ je odprta okolica točke $f(0) = 0 \in \mathbb{R}^m$. Ker je f diferenciabilna, je zvezna. Zato je f^{-1} odprta množica, ki vsebuje 0, torej odprta v okolici točke 0 in je

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} : &= \{x : \|x\| < r/2, f(x) \in \mathcal{V}\} \\
&= \underbrace{\{x : \|x\| < r\}}_{\text{odprta}} \cap \underbrace{f^{-1}(\mathcal{V})}_{\text{odprta}} \text{ odprta okolica točke } 0 \in \mathbb{R}^m.
\end{aligned}
$$

Torej je $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ bijekcija. Torej smo pokazali, da je preslikava f lokalno obrnljiva. Ostane nam še, da pokažemo, da je inverz diferenciabilen.

Najprej pokažemo diferenciabilnost inverza v točki 0. Naj bo $\varphi = (f|_{\mathcal{U}})^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, $\varphi(y) = x$. Vemo, če je $\|y\| < \rho/2$, je $\|\varphi(y)\| < \rho$. Sledi

$$(*) \quad \|\varphi(y)\| \le 2\|y\| \quad \text{za vsak } \; y \in \mathcal{V}.$$

Ker je f diferenciabilna v točki 0, je

$$f(x) = f(0) + \big((Df)(0)\big)(x) + \eta(x), \quad \lim_{x \to 0} \frac{\eta(x)}{\|x\|} = 0,$$

torej

$$f(x) = x + \eta(x),$$

saj $(Df)(0) = I$. Sledi

$$y = \varphi(y) + \eta\big(\varphi(y)\big)$$

oziroma

$$(**) \qquad \varphi(y) = y - \eta\big(\varphi(y)\big).$$

od koder zaradi $(*)$ naprej sledi, če je $y \neq 0$, da je

$$\frac{\|\eta\big(\varphi(y)\big)\|}{\|y\|} \leq \frac{\|2\eta\big(\varphi(y)\big)\|}{\|\varphi(y)\|}.$$

V limiti, ko gre y proti 0, gre desna stran proti 0, saj gre $\varphi(y)$ proti 0 zaradi $(*)$. To pa pomeni, da gre tudi leva stran proti 0, in zato iz $(**)$ sledi, da je φ diferenciabilna v točki 0 in $(D\varphi)(0) = I$.

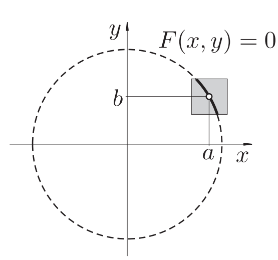
$$\varphi(0+y) = \varphi(0) + I(y) + \omega(y)$$

S tem smo dokazali diferenciabilnost inverza, t.j. $(f|_{\mathcal{U}})^{-1}$, v točki $y = 0$. Za dokaz diferenciabilnosti v točkah $y_0 \neq 0$ ponovimo celoten postopek za f v točki $x_0 = \varphi(y_0)$. Izrek je v celoti dokazan. $\square$

Opomba: Lahko se tudi zgodi, da obrat diferenciabilne funkcije, ki je obrnljiva, v neki točki ni diferenciabilen, npr. inverz funkcije $h : x \mapsto x^3$, t.j. $h^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$, v $x = 0$ ni diferenciabilen.

1.8 Izrek o implicitni funkciji

(i) Naj bo f funkcija dveh spremenljivk. Oglejmo si enačbo $f(x, y) = 0$. Naj bo (a, b) ničla funkcije f, t.j. $f(a, b) = 0$. Vprašanje je, kdaj se da enačbo $f(x, y) = 0$ v okolici točke (a, b) razrešiti na npr. y? Oglejmo si primer $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.



Slika 1.10: Delček krivulje na sliki je graf neke funkcije

(ii) Oglejmo si sistem n_2 linearnih enačb z $n_1 + n_2$ neznankami $(*)$.

$$(*)\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n_1}x_{n_1} + \beta_{11}y_1 + \ldots + \beta_{1n_2}y_{n_2} = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2n_1}x_{n_1} + \beta_{21}y_1 + \ldots + \beta_{2n_2}y_{n_2} = 0 \\ \ldots \\ \alpha_{n_21}x_1 + \ldots + \alpha_{n_2n_1}x_{n_1} + \beta_{n_21}y_1 + \ldots + \beta_{n_2n_2}y_{n_2} = 0 \end{cases}$$

Kdaj lahko ta sistem enolično razrešimo na $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$, t.j. kdaj za vsak $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ obstaja natanko ena n_2-terica $(y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$, ki izpolnjuje zgornji sistem enačb. Odgovor: Natanko tedaj, ko je matrika

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n_2} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & & \beta_{2n_2} \\ \vdots & & \ddots & \\ \beta_{n_21} & \beta_{n_22} & & \beta_{n_2n_2} \end{bmatrix}$$

nesingularna, t.j. $\det([\beta]) \neq 0$. V matričnem zapisu lahko tedaj zapišemo

$$[\alpha]X + [\beta]Y = 0$$

$$[\beta]Y = -[\alpha]X$$

$$Y = -[\beta]^{-1}[\alpha]X.$$

Zgornji sistem enačb lahko dopolnimo do ekvivalentnega sistema $n_1 + n_2$ enačb $(**)$,

$$(**)\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n_1}x_{n_1} + \beta_{11}y_1 + \ldots + \beta_{1n_2}y_{n_2} = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2n_1}x_{n_1} + \beta_{21}y_1 + \ldots + \beta_{2n_2}y_{n_2} = 0 \\ \ldots \\ \alpha_{n_21}x_1 + \ldots + \alpha_{n_2n_1}x_{n_1} + \beta_{n_21}y_1 + \ldots + \beta_{n_2n_2}y_{n_2} = 0 \\ x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ \ldots \\ x_{n_1} = x_{n_1} \end{cases}$$

Matrika sistema enačb $(**)$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

je nesingularna natanko tedaj, ko je matrika $[\beta]$ nesingularna, t.j. $\det([\beta]) \neq 0$. Zato za vsako desno stran v sistemu $(**)$ obstaja natanko ena $n_1 + n_2$-terica

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}),$$

ki reši sistem $(**)$.

Definicija 14 *Naj bosta $\Omega_1^{odp} \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $\Omega_2^{odp} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ in $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^p$ preslikava razreda $\mathcal{C}^1$. Naj bo $(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Definirajmo linearno preslikavo $g : \Omega_2 \to \mathbb{R}^p$ s formulo $g(y) = f(a, y)$. Če je ta preslikava diferenciabilna v točki b, tedaj $(Dg)(b) : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^p$ imenujemo parcialni diferencial preslikave f v točki (a, b) na drugo spremenljivko in ga označimo z $(Dg)(b) = (D_2 f)(a, b)$. Podobno definiramo preslikavo $h : \Omega_1 \to \mathbb{R}^p$ s formulo $h(x) = f(x, b)$ in označimo $(Dh)(a) = (D_1 f)(a, b)$.*

Diskusija: Če je

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) = \big(& f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}), \\ & f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}), \\ & \ldots, \\ & f_p(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})\big), \end{aligned}$$

je

$$(D_1 f)(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n_1}}(a, b) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{n_1}}(a, b) \end{bmatrix}$$

in

$$(D_2 f)(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{n_2}}(a, b) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_{n_2}}(a, b) \end{bmatrix},$$

t.j.

$$(Df)(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n_1}}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{n_2}}(a, b) \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{n_1}}(a, b) & \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_{n_2}}(a, b) \end{bmatrix}.$$

Izrek 14 (o implicitni funkciji) *Naj bosta* $\Omega_1^{odp} \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $\Omega_2^{odp} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ *in* $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^{n_2}$ *preslikava razreda* $\mathcal{C}^1$. *Naj bo* $(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, $f(a, b) = 0$ *in naj bo* $(D_2 f)(a, b)$ *nesingularna. Tedaj obstaja okolica* $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ *točke* (a, b), *vsebovana v* $\Omega_1 \times \Omega_2$ *taka, da za vsak* $x \in \mathcal{U}_1$ *obstaja natanko en* $y = \varphi(x) \in \mathcal{U}_2$, *da je* $f\big(x, y\big) = 0$. *Preslikava* $\varphi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$, *t.j.* $\varphi : x \mapsto \varphi(x)$, *je razreda* $\mathcal{C}^1$.

Opomba: Izrek pove naslednje: Naj bo danih n_2 funkcij $f_1, f_2, \ldots, f_{n_2}$ $n_1 + n_2$ spremenljivk. Skušamo rešiti sistem enačb (†)

$$(\dagger)\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ f_{n_2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) = 0 \end{cases}$$

na spremenljivke $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ (torej te želimo enolično izraziti z $x_1, \ldots, x_{n_1}$). Naj bodo vse $f_1, f_2, \ldots, f_{n_2}$ v okolici točke $(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n_2})$ razreda $\mathcal{C}^1$ in naj velja

$$f_1(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}) = 0$$

$$f_2(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}) = 0$$

$$\cdots$$

$$f_{n_2}(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}) = 0$$

in matrika

$$(D_2 f)(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a_1, \ldots, b_{n_2}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{n_2}}(a_1, \ldots, b_{n_2}) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_{n_2}}{\partial y_1}(a_1, \ldots, b_{n_2}) & \cdots & \frac{\partial f_{n_2}}{\partial y_{n_2}}(a_1, \ldots, b_{n_2}) \end{bmatrix}$$

naj bo nesingularna. Tedaj obtajata odprta okolica $\mathcal{U}_1$ točke $(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ in odprta okolica $\mathcal{U}_2$ točke $(b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$, da za vsak $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) \in \mathcal{U}_1$ obstaja natanko en $(y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) \in \mathcal{U}_2$, da velja (†). Tako dobljene funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n_2}$, $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$ za $i \in \{1, 2, \ldots, n_2\}$, so razreda $\mathcal{C}^1$.

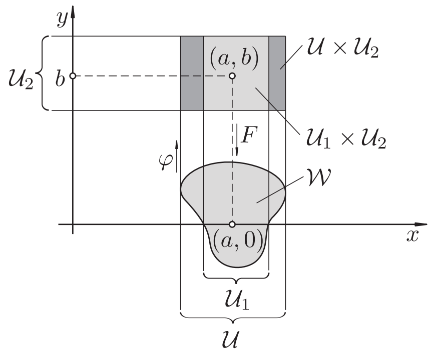
Opomba: Naj bosta $n_1 = n_2 = 1$. Izrek pravi: naj bo funkcija f v okolici točke $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ razreda $\mathcal{C}^1$. Naj bo $f(a,b) = 0$ in $\partial f/\partial y(a,b) \neq 0$. Tedaj obstajata odprti okolici $\mathcal{U}_1$ točke $a \in \mathbb{R}$ in $\mathcal{U}_2$ točke $b \in \mathbb{R}$ ter funkcija $\varphi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ razreda $\mathcal{C}^1$, da je $(x,y) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ in $f(x,y) = 0$ natanko tedaj, ko je $x \in \mathcal{U}_1$ in $y = \varphi(x)$, t.j. na $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ je enačba $f(x,y) = 0$ ekvivalentna enačbi $y = \varphi(x)$.

Opomba: V splošnem je $\{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ neka morda zapletena množica točk v ravnini. V našem posebej lepem primeru, ko je $f \in \mathcal{C}^1$, $f(a,b) = 0$ in $\partial f/\partial y(a,b) \neq 0$ pa je v okolici $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ točke (a,b) množica rešitev naše enačbe $f(x,y) = 0$ graf neke gladke funkcije φ.

Dokaz izreka: Najprej si oglejmo poseben primer, ko je $n_1 = n_2 = 1$ (glej predzadnjo opombo). Oglejmo si preslikavo F, ki je dana s formulo $F(x,y) = \big(x, f(x,y)\big)$. Ker je $f \in \mathcal{C}^1$, je tudi $F \in \mathcal{C}^1$. Preslikava F preslika okolico točke $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ nazaj v $\mathbb{R}^2$. Odvod preslikave F v točki (a,b) je

$$(DF)(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{bmatrix}.$$

Ker je po predpostavki $\partial f/\partial y(a,b) \neq 0$, je $\det\big((DF)(a,b)\big) \neq 0$. Preslikava F je v okolici točke (a,b) razreda $\mathcal{C}^1$ in $F(a,b) = \big(a, f(a,b)\big) = (a,0)$. Preslikava F torej slika (a,b) v $(a,0)$. Matrika $(DF)(a,b)$ je nesingularna. Po izreku o inverzni preslikavi obstajata odprta okolica $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_2$ točke (a,b) in odprta okolica $\mathcal{W}$ točke $(a,0)$, da je $F|_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}_2} : \mathcal{U} \times \mathcal{U}_2 \to \mathcal{W}$ difeomorfizem, t.j. bijekcija, katere inverz je razreda $\mathcal{C}^1$.



Slika 1.11: Izrek o implicitni funkciji

Naj bo $\varphi : \mathcal{W} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}_2$ inverz preslikave $F|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}_2}$. Vemo, da je $\varphi \in \mathcal{C}^1$.

$$\varphi(x, y) = \big(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)\big)$$

Ker F ohranja x-koordinate točke, jo tudi φ ohranja. Torej je $\varphi_1(x, y) \equiv x$ in $\varphi(x, y) = \big(x, \varphi_2(x, y)\big)$. Ker je $\mathcal{W}$ odprta in vsebuje točko $(a, 0)$, obstaja okolica $\mathcal{U}_1$ točke a, da je $(x, 0) \in \mathcal{W}$, če je $x \in \mathcal{U}_1$.

Definirajmo $y = \varphi_2(x, 0)$ za vsak $x \in \mathcal{U}_1$. Jasno je φ_2 razreda $\mathcal{C}^1$ na $\mathcal{U}_1$. Velja: $x \in \mathcal{U}_1$, $y \in \mathcal{U}_2$ in $f(x, y) = 0$ velja natanko tedaj, ko je $(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}_2$ in $F(x, y) = (x, 0)$. Torej $(x, y) = \varphi(x, 0) = \big(x, \varphi_2(x, 0)\big)$, t.j. $y = \varphi_2(x, 0)$.

Dokažemo to še v splošnem. Oglejmo si preslikavo f dano s predpisom

$$\begin{aligned} f : (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) = \big(& f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}), \\ & f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}), \\ & \ldots, \\ & f_{n_2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})\big), \end{aligned}$$

$$(D_2 f)(a, b) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(a, b) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_{n_2}}(a, b) \\ \vdots & \ddots & \\ \dfrac{\partial f_{n_2}}{\partial y_1}(a, b) & \cdots & \dfrac{\partial f_{n_2}}{\partial y_{n_2}}(a, b) \end{bmatrix},$$

Definirajmo $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^{n_1+n_2}$,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) = \big(&x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, \\ &f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}), \\ &f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}), \\ &\quad \ldots, \\ &f_{n_2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})\big), \end{aligned}$$

$$(DF)(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n_1}}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{n_2}}(a,b) \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_{n_2}}{\partial x_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_{n_2}}{\partial x_{n_1}}(a,b) & \frac{\partial f_{n_2}}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_{n_2}}{\partial y_{n_2}}(a,b) \end{bmatrix}$$

Ker je desni spodnji blok matrike, t.j. $(D_2F)(a,b)$, nesingularen, je tudi celotna matrika $(DF)(a,b)$ nesingularna. Po izreku o inverzni preslikavi obstajata okolici $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_2$ točke $(a,b) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ in $\mathcal{W}$ točke $(a,0)$, da je $F|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}_2} : \mathcal{U}\times\mathcal{U}_2 \to \mathcal{W}$ difeomorfizem. Naj bo $\varphi : \mathcal{W} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}_2$ inverz preslikave $F|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}_2}$, ki je razreda $\mathcal{C}^1$. Obstaja okolica $\mathcal{U}_1$ točke $a \in \mathbb{R}^{n_1}$, da je $(x,0) \in \mathcal{W}$, čim je $x \in \mathcal{U}_1$. Za $x \in \mathcal{U}_1$ naj bo y projekcija točke $\varphi(x,0)$ na $\mathcal{U}_2$, t.j.

$$y = \big(\varphi_{n_1+1}(x,0), \varphi_{n_1+2}(x,0), \ldots, \varphi_{n_1+n_2}(x,0)\big).$$

Sedaj je $x \in \mathcal{U}_1$, $y \in \mathcal{U}_2$ in $f(x,y) = 0$ natanko tedaj, ko je $(x,y) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ in $F(x,y) = (x,0)$, torej $(x,y) = \varphi(x,0) = \big(x, \varphi_2(x,0)\big)$. Torej je $y = \varphi_2(x)$. $\square$

Posledica 2 *Naj bo vse kot v prejšnjem izreku. Naj bo*

$$A(x) = (D_2 f)\big(x,y\big) \quad \text{in} \quad B(x) = (D_1 f)\big(x,y\big).$$

Če je $\mathcal{U}_1$ dovolj majhna okolica točke a, je $A(x)$ nesingularna za vse $x \in \mathcal{U}_1$ in velja

$$(D\varphi)(x) = -A(x)^{-1} \circ B(x),$$

kjer je φ razreda $\mathcal{C}^1$ na $\mathcal{U}$

Dokaz: za $n_1 = n_2 = 1$ sledi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

in od tod

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}.$$

Dokaz v splošnem je podoben kot v primeru $n_1 = n_2 = 1$. Odvajamo in dobimo

$$(D_1 f)(x,y)I + (D_2 f)(x,y)(D\varphi)(x) = 0.$$

Od tod sledi zgornja formula

$$(D\varphi)(x) = -\big((D_2 f)(x,y)\big)^{-1}\big((D_1 f)(x,y)\big).$$

$\square$

Diskusija: Iz razmišljanja, ali se da sistem enačb

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0,
\end{aligned}$$

kjer je $m < n$, enolično razrešiti na kakšno m-terico x-ov, sledi še ena formulacija izreka o implicitni funkciji.

Izrek 15 *Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda $\mathcal{C}^1$, kjer je $m < n$. Naj bo $F(a) = 0$ in rang matrike $(DF)(a) = m$ (torej rang je največji možen). Tedaj obstajajo $p_1, p_2, \ldots, p_{n-m}$, $q_1, q_2, \ldots, q_m$, $p_i \neq q_j$ za vsak i, j ($p_1 < p_2 < \ldots < p_{n-m}$ in $q_1 < q_2 < \ldots < q_m$) in funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ razreda $\mathcal{C}^1$ v okolici točke $(a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots, a_{p_{n-m}})$, da je v neki okolici $\mathcal{U}$ točke a*

enačba $F(x) = 0$ ekvivalentna sistemu enačb

$$x_{q_1} = \varphi(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_{n-m}})$$
$$x_{q_2} = \varphi(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_{n-m}})$$
$$\ldots$$
$$x_{q_m} = \varphi(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_{n-m}}),$$

t.j. v okolici točke a je mogoče $F(x) = 0$ enolično razrešiti na $(x_{q_1}, x_{q_2}, \ldots, x_{q_m})$.

Opomba: Rang take matrike je enak redu največje nesingularne podmatrike (kvadratne seveda). Če je rang $= m$, potem obstaja nesingularna podmatrika velikosti $m \times m$.

Dokaz: Spremenljivke med seboj permutiramo tako, da so tiste, ki v $(DF)(a)$ pokažejo rang m na desnem koncu matrike in po zgornjem izreku razrešimo sistem na te spremenljivke. □

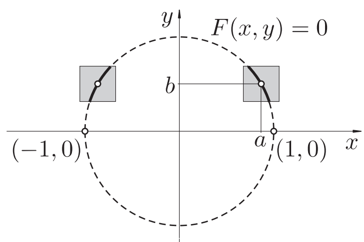
Diskusija: Oglejmo si matriko odvodov

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}.$$

Če ima ta matrika maksimalen rang, lahko ta sistem enačb v okolici točke $a \in \mathbb{R}^n$ razrešimo tako, da je m-spremenljivk enolično izraženih z ostalimi $n - m$-spremenljivakmi. Ker je rang maksimalen v matriki obstaja vsaj ena kvadratna podmatrika reda m, ki je nesingularna. Recimo, da je sestavljena iz q_1-tega, q_2-tega, $\ldots, q_m$-tega stolpca, kjer je $q_1 < q_2 < \ldots < q_m$. Tedaj lahko sistem razrešimo na $(x_{q_1}, x_{q_2}, \ldots, x_{q_m})$. V splošnem bo to mogoče narediti na več različnih načinov, saj ni nujno, da je v matriki ena sama podmatrika, ki je nesingularna in reda m.

Zgled: Naj bo $F(x, y) = 0$, $F(a, b) = 0$, $F \in \mathcal{C}^1$ v okolici točke $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Vzemimo npr. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, kar pomeni, da je točka (x, y) na krožnici s središčem v izhodišču in s polmerom 1.

(*i*) Če je $\partial F/\partial y(a,b) \neq 0$, potem je lokalno, t.j. v okolici točke (a,b), mogoče enačbo $F(x,y) = 0$ razrešiti na y. Naj bo (a,b) taka točka na krožnici torej $F(a,b) = 0$ oz. $a^2 + b^2 - 1 = 0$, za katero je $b \neq 0$. Pri tem je $\partial F/\partial y(a,b) = 2b \neq 0$.

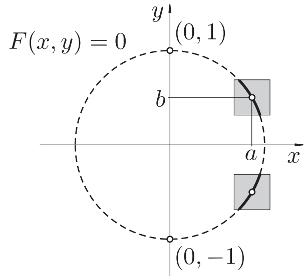


Slika 1.12: V okolici točke (a,b) je mogoče zapisati $y = \varphi(x)$

Po izreku je torej $F(x,y) = 0$ v okolici točke (a,b) mogoče prepisati v obliko $y = \varphi(x)$. Jasno je s slike 1.12, da je možno F zapisati kot graf funkcije (velja lokalno). V okolici točk $(1,0)$ in $(-1,0)$ pa to ni mogoče. V teh točkah je seveda

$$\frac{\partial F}{\partial y}(-1,0) = \frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 0.$$

(*ii*) Naj bo (a,b) taka točka na krožnici, t.j. $F(a,b) = 0$ oz. $a^2 + b^2 - 1 = 0$, za katero je $a \neq 0$. Če je $\partial F/\partial x(a,b) \neq 0$, je tedaj mogoče v okolici točke (a,b) enačbo $F(x,y) = 0$ razrešiti na x. Ker je $\partial F/\partial x(a,b) = 2a \neq 0$, je po izreku mogoče v okolici točke (a,b) enačbo $F(x,y) = 0$ prepisati v obliko $x = \psi(y)$.



Slika 1.13: V okolici točke (a,b) je mogoče zapisati $x = \psi(y)$

To je mogoče napraviti za vsako točko (a, b) na krožnici, razen za točki $(0, 1)$ in $(0, -1)$. To lahko razberemo z zgornje slike. V teh točkah je seveda

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,1) = \frac{\partial F}{\partial x}(0,-1) = 0.$$

Iz splošnega izreka sledi: Če je $F(a, b) = 0$, če je

$$\operatorname{rang}\left(\left[\frac{\partial F}{\partial x}(a,b), \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right]\right) = 1,$$

t.j. ko je vsaj eden od odvodov različen od 0, tedaj je $F(x, y) = 0$ mogoče enolično razrešiti na eno od spremenljivk.

V našem primeru je ta rang v vsaki točki krožnice enak 1, saj je ta matrika $[\partial F/\partial x(a, b), \partial F/\partial y(a, b)] = [2a, 2b]$. Množica rešitev je torej v okolici vsake točke neka krivulja, ki je graf gladke funkcije, ali $y = \varphi(x)$ ali $x = \psi(y)$.

$\Diamond$

Zgled: (Ploskve v prostoru) Naj bo F funkcija razreda $\mathcal{C}^1$, $F(x, y, z) = 0$ in naj bo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ točka, za katero je $F(a, b, c) = 0$. Naj bo rang

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c), \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c), \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)\right] = 1.$$

To pomeni, da je vsaj eden od parcialnih odvodov različen od 0. Tedaj je v okolici (a, b, c) mogoče $F(x, y, z) = 0$ enolično razrešiti na eno od spremenljivk;

(i) Če je $\partial F/\partial x(a, b, c) \neq 0$, je $F(x, y, z) = 0$ mogoče lokalno zapisati kot $x = f(y, z)$.

(ii) Če je $\partial F/\partial y(a, b, c) \neq 0$, je $F(x, y, z) = 0$ mogoče lokalno zapisati kot $y = g(x, z)$.

(iii) Če je $\partial F/\partial z(a, b, c) \neq 0$, je $F(x, y, z) = 0$ mogoče lokalno zapisati kot $z = h(x, y)$.

$\Diamond$

Zgled: (Krivulje v prostoru) Naj bosta F in G funkciji razreda $\mathcal{C}^1$ v okolici $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ in

$$(*) \begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad \begin{matrix} F(a,b,c) = 0, \\ G(a,b,c) = 0. \end{matrix}$$

Rešitev sistema $(*)$ je v splošnem lahko le točka (a, b, c). Matrika odvodov

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) & \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(a,b,c) & \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial G}{\partial z}(a,b,c) \end{bmatrix}$$

naj ima maksimalen rang. To je lahko res v treh primerih:

(i) Če je

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial G}{\partial z}(a,b,c) \end{vmatrix} \neq 0,$$

tedaj je pripadajoča kvadratna matrika nesingularna. Tedaj lahko sistem $(*)$ v okolici $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ razrešimo na spremenljivki y in z, t.j. $F(x, y, z) = 0$ in $G(x, y, z) = 0$ je mogoče nadomestiti z $y = \varphi(x)$ in $z = \psi(x)$.

(ii) Če je

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) & \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \\ \frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) & \frac{\partial G}{\partial z}(a,b,c) \end{vmatrix} \neq 0,$$

tedaj je pripadajoča kvadratna matrika nesingularna. Tedaj lahko sistem $(*)$ v okolici $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ razrešimo na spremenljivki x in z, t.j. $F(x, y, z) = 0$ in $G(x, y, z) = 0$ je mogoče nadomestiti z $x = \varphi(y)$ in $z = \psi(y)$.

(iii) Velja podobno.

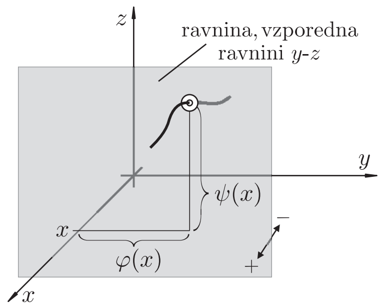
V primeru (i) lahko zapišemo $(x, y, z) = \big(x, \varphi(x), \psi(x)\big)$ oziroma

$$x = x$$

$$y = \varphi(x)$$

$$z = \psi(x)$$

v okolici a je krivulja v prostoru, x je parameter.



Slika 1.14: V okolici točke (a, b, c) je sistem $(*)$ mogoče zapisati $x = x$, $y = \varphi(x)$, $z = \psi(z)$

Točka $\odot$ na sliki 1.14 opiše neko krivuljo v prostoru. $\Diamond$

Zgled: (Uporaba izreka o inverzni funkciji) Krivuljo kot tir poti v prostoru podamo s sistemom enačb

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Funkcije f, g, h so razreda $\mathcal{C}^1$. V fizikalnem smislu s tem popišemo gibanje točke v prostoru, parameter t je čas. V splošnem primeru je lahko tir poti tudi „grda" krivulja (samopresečne točke, osti,...). Naj bo $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Vprašamo se, kdaj je mogoče z gotovostjo reči, da je

$$\{(f(t), g(t), h(t)) : t_0 - \delta < t < t_0 + \delta\}$$

košček gladke krivulje, opisane v prejšnjem primeru.

Naj bo npr. $\dot{f}(t) \neq 0$. Tedaj je mogoče enačbo $x = f(t)$ za t blizu t_0 in x blizu $f(t_0)$ po izreku o inverzni funkciji enolično razrešiti na t kot funkcijo spremenljivke x, t.j. zamenjati z enačbo $t = \psi(x)$. Od tod sledi

$$y = g(t) = g\big(\psi(x)\big) = \Phi(x)$$
$$z = h(t) = h\big(\psi(x)\big) = \Psi(x).$$

Torej lahko enačbe $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ v okolici točke $\big(f(t_0), g(t_0), h(t_0)\big)$ zapišemo kot

$$x = x, \quad y = \Phi(x), \quad z = \Psi(x),$$

kar je gladka krivulja v $\mathbb{R}^3$. Enak sklep velja za $\dot{g}(t) \neq 0$ oz. $\dot{h}(t) \neq 0$. Sklepamo lahko, če je torej vsaj eden od odvodov $\dot{f}(t), \dot{g}(t), \dot{h}(t)$ različen od 0, potem je košček poti pri t blizu t_0 košček gladke krivulje, t.j. takrat, ko je $\mathrm{rang}[\dot{f}(t), \dot{g}(t), \dot{h}(t)]$ maksimalen. $\diamondsuit$

Zgled: Naj bosta u in v parametra. Naj bo $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z = h(u,v)$, kjer so f, g, h gladke funkcije dveh spremenljivk v okolici $\mathcal{U}$ točke $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.

Kot primer vzemimo enotsko sfero, ki je parametrično podana z

$$\begin{aligned} x &= \cos\vartheta\cos\varphi \\ y &= \cos\vartheta\sin\varphi \\ z &= \sin\vartheta, \end{aligned}$$

kjer $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Točka (φ, ϑ) se torej preslika v točko na enotski sferi.

Vprašamo se, kdaj je mogoče z gotovostjo reči, da je

$$\{\big(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\big) : (u,v) \in \mathcal{U}\}$$

za majhno okolico $\mathcal{U}$ neke točke $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ košček ploskve v prostoru? Oglejmo si matriko odvodov

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial h}{\partial v}(u_0,v_0) \end{bmatrix}.$$

Privzemimo, da je rang maksimalen, torej 2. Recimo, da je

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial h}{\partial v}(u_0,v_0) \end{bmatrix}$$

nesingularna. Tedaj je mogoče sistem enačb

$$\begin{aligned} y &= g(u,v) \\ z &= h(u,v) \end{aligned}$$

enolično razrešiti na u in v za u blizu u_0, v blizu v_0, y blizu $y_0 = g(u_0, v_0)$ in z blizu $z_0 = h(u_0, v_0)$. To je mogoče po izreku o inverzni funkciji, saj je zgornja matrika odvod preslikave

$$(u, v) \mapsto \big(g(u, v), h(u, v)\big)$$

v točki (u_0, v_0). Ker je matrika nesingulana, obstaja lokalni inverz, t.j. obstajata torej okolica $\mathcal{P}$ točke (u_0, v_0) in okolica $\mathcal{Q}$ točke (y_0, z_0), da je preslikava $(u, v) \mapsto \big(g(u, v), h(u, v)\big)$ difeomorfizem. Torej obstajata $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1$, da je $u = \varphi(y, z)$, $v = \psi(y, z)$, $(y, z) \in \mathcal{Q}$. To vstavimo v $x = f(u, v)$ in dobimo

$$\begin{aligned} x &= f(u, v) \\ &= \big(\varphi(y, z), \psi(y, z)\big) \\ &= \Phi(y, z). \end{aligned}$$

Torej je $\{\big(f(u, v), g(u, v), h(u, v)\big) : \ (u, v) \in \mathcal{U}\}$ res košček ploskve, namreč graf funkcije $\Phi : (y, z) \mapsto \Phi(y, z) = x$. $\Diamond$

1.9 O pojmu mnogoterosti

Krivulje v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, ploskve v $\mathbb{R}^3$ so posebni primeri mnogoterosti.

Definicija 15 *Naj bo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ diferenciabilna preslikava. Pravimo, da ima F v točki $a \in \mathcal{U}$ rang r, če ima matrika $(DF)(a)$ rang r.*

Mnogoterost bo posplošitev krivulje in ploskve in bo lokalno množica ničel sistema enačb z maksimalnim rangom.

Definicija 16 *Naj bo $1 \leq r \leq n$. Neprazna množica $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ je* ***gladka mnogoterost*** *dimenzije r, če za vsak $u \in \mathcal{M}$ obstajajo*

(i) odprta okolica $\mathcal{U}$ točke u,

(ii) funkcije $F_1, F_2, \ldots, F_{n-r}$ razreda $\mathcal{C}^1$ na $\mathcal{U}$, da ima preslikava

$$u \mapsto F(u) = \big(F_1(u), F_2(u), \ldots, F_{n-r}(u)\big)$$

maksimalen rang $n - r$ v vsaki točki $u \in \mathcal{U}$

(iii) in

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{M} = \{u \in \mathcal{U} : F_1(u) = 0, F_2(u) = 0, \ldots, F_{n-r}(u) = 0\}.$$

Opomba: Če je dimenzija mnogoterosti r, lahko lokalno izrazimo $n-r$ x-ov z ostalimi r x-i.

Opomba: (zgledi zgoraj)

- $F(x,y) = 0$, $n = 2$, $r = 1$, t.j. krivulja v ravnini
- $F(x,y,z) = 0$, $n = 3$, $r = 2$, t.j. ploskev v prostoru
- $F(x,y,z) = 0$, $G(x,y,z) = 0$, $n = 3$, $r = 1$, t.j. krivulja v prostoru

Zgled: Množica $\{x : x \in \mathbb{R}^n\}$,

$$\left.\begin{aligned} x_{r+1} &= 0 \\ x_{r+2} &= 0 \\ &\cdots \\ x_n &= 0 \end{aligned}\right\} n - r \text{ enačb},$$

je r-dimenzionalna koordinatna ravnina v $\mathbb{R}^n$. $\diamondsuit$

Posebeni primeri:

- $\{(x, f(x)) : x \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}\}$ graf v $\mathbb{R}^2$ je krivulja
- $\{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2\}$ graf v $\mathbb{R}^3$ je ploskev
- $\{(x, g(x), h(x)) : x \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}\}$ krivulja v $\mathbb{R}^3$

Zgled: Vzemimo primer, ko je $n = 3$ in $r = 2$ (t.j. ena sama enačba). Lokalno je to (po permutaciji spremenljivk) oblike

$$\{(x, y, \Phi(x,y)) : (x,y) \in \mathcal{U}\},$$

pri tem je $\Phi \in \mathcal{C}^1$ na odprti množici $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. Oglejmo si gladke poti skozi a, ki ležijo na

$$\mathcal{M} = \{(x, y, \Phi(x,y)) : (x,y) \in \mathcal{U}\},$$

t.j. funkcije

$$t \mapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big) = X(t),$$

kjer so $x(t), y(t), z(t)$ gladke funkcije, $X(0) = a$. Ležati na $\mathcal{M}$ pomeni, da je $z = \Phi(x, y)$. Torej so naše poti oblike $X(t) = \big(x(t), y(t), \Phi(x(t), y(t))\big)$, kjer je Φ tudi gladka funkcija. Pri tem je $x(0) = a_1$, $y(0) = a_2$, $a = (a_1, a_2, a_3) = \big(a_1, a_2, \Phi(a_1, a_2)\big)$.

$$\begin{aligned}
\dot{X}(t) &= \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \frac{d}{dt}\Big(\Phi\big(x(t), y(t)\big)\Big)\right) \\
&= \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \frac{\partial\Phi}{dx}\big(x(t), y(t)\big)\dot{x}(t) + \frac{\partial\Phi}{dy}\big(x(t), y(t)\big)\dot{y}(t)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{X}(0) &= \left(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \frac{\partial\Phi}{dx}\big(x(0), y(0)\big)\dot{x}(0) + \frac{\partial\Phi}{dy}\big(x(0), y(0)\big)\dot{y}(0)\right) \\
&= \left(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \frac{\partial\Phi}{dx}\big(a_1, a_2\big)\dot{x}(0) + \frac{\partial\Phi}{dy}\big(a_1, a_2\big)\dot{y}(0)\right) \\
&= \dot{x}(0)\left(1, 0, \frac{\partial\Phi}{dx}\big(a_1, a_2\big)\right) + y(0)\left(0, 1, \frac{\partial\Phi}{dy}\big(a_1, a_2\big)\right),
\end{aligned}$$

kjer je $\dot{X}(0)$ tangentni vektor na pot $X(t)$ v točki a.

Sklep: Tangentni vektor v točki a na poljubno gladko pot skozi a, ki leži vsa v $\mathcal{M}$, je vedno linearna kombinacija vektorjev

$$\left(1, 0, \frac{\partial\Phi}{dx}\big(a_1, a_2\big)\right), \qquad \left(0, 1, \frac{\partial\Phi}{dy}\big(a_1, a_2\big)\right)$$

t.j. vedno leži v ravnini, napeti na ta dva vektorja. Tej ravnini (dvodimenzionalnem podprostoru prostora $\mathbb{R}^3$) pravimo ***tangentni prostor*** na $\mathcal{M}$ v točki a in ga označimo $T_a\mathcal{M}$. $\diamondsuit$

Opomba: Enako sklepanje je mogoče narediti za splošne mnogoterosti.

1.10 Taylorjeva formula

Definicijo Taylorjeve formule iz Analize I bi radi posplošili na funkcije več spremenljivk. Oglejmo si najprej poseben primer: Naj bo $\mathcal{G}$ odprta množica v $\mathbb{R}^2$

in $f \in \mathcal{C}^{r+1}(\mathcal{G})$. Naj bo $(a,b) \in \mathcal{G}$, $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ in daljica s krajiščema v točkah (a,b) in $(a+h,b+k)$ vsa v $\mathcal{G}$. Definirajmo funkcijo F s predpisom

$$\begin{aligned} F(t) &= f\big((a,b)+t(h,k)\big) \\ &= f(a+th,b+tk). \end{aligned}$$

Funkcija ene spremenljivke F je $r+1$-krat zvezno odvedljiva kot kompozicija funkcij $t \mapsto (a+th,b+tk)$ in f. Pri tem je

$$\begin{aligned} F(t) &= f(a+th,b+tk) \\ F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a+th,b+tk)\frac{d}{dt}(a+th) + \frac{\partial f}{\partial y}(a+th,b+tk)\frac{d}{dt}(b+tk) \\ &= h\frac{\partial f}{\partial x}(a+th,b+tk) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a+th,b+tk) \\ F''(t) &= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th,b+tk) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th,b+tk) + \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th,b+tk) \\ F'''(t) &= h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+th,b+tk) + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a+th,b+tk) + \\ &\qquad + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a+th,b+tk) + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a+th,b+tk) \end{aligned}$$

Na podoben način dobimo še ostale odvode.

Če uporabimo Taylorjev izrek za funkcije ene spremenljivke, dobimo, da je

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{1}{r!}F^{(r)}(0) + \frac{1}{(r+1)!}F^{r+1}(\vartheta),$$

kjer je $0 < \vartheta < 1$. V našem primeru bi to pomenilo

$$\begin{aligned} f(a+th,b+tk) &= f(a,b) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) + \ldots \end{aligned}$$

Zaradi krajše pisave bomo uporabili oznako $D_i = \partial/\partial x_i$.

Izrek 16 *Naj bo $\mathcal{G}$ odprta množica v $\mathbb{R}^n$ in funkcija f razreda $\mathcal{C}^{r+1}$ na $\mathcal{G}$. Naj bo $h \in \mathbb{R}^n$ tak, da je $a+th \in \mathcal{G}$ za $a \in \mathcal{G}$ in $t \in [0,1]$. Tedaj obstaja ϑ, $0 < \vartheta < 1$,* *da je*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} h_j Dj\right) f\right](a) + \frac{1}{2!}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} h_j Dj\right)^2 f\right](a) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{r!}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} h_j Dj\right)^r f\right](a) + \frac{1}{(r+1)!}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} h_j Dj\right)^{r+1} f\right](a+\vartheta h).$$

*Zgornji izraz imenujemo **Taylorjeva formula** za funkcije več spremenljivk.*

Opomba: Oglejmo si primer, ko je $n = 2$ in $r = 2$. Naj bo $a = (a_1, a_2)$.

$$\begin{aligned}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} h_j D_j\right) f\right](a) &= \big((h_1 D_1 + h_2 D_2) f\big)(a) \\ &= (h_1 D_1 f + h_2 D_2 f)(a) \\ &= h_1 (D_1 f)(a) + h_2 (D_2 f)(a) \\ &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\end{aligned}$$

$$\left[\left(\sum_{j=1}^{n} h_j D_j\right)^2 f\right](a) = h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)$$

$$\begin{aligned}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} h_j D_j\right)^3 f\right](a+\vartheta h) = h_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(a+\vartheta h) + 3h_1^2 h_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(a+\vartheta h) + \\ + 3h_1 h_2^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(a+\vartheta h) + h_2^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(a+\vartheta h)\end{aligned}$$

Taylorjeva formula je

$$\begin{aligned}f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1,a_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2) + \\ + \frac{1}{2!}\left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1,a_2) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1,a_2) + \right. \\ \left. + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1,a_2)\right) + \frac{1}{3!}\left(h_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(a_1+\vartheta h_1, a_2+\vartheta h_2) + \dots + \right. \\ \left. + h_2^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(a_1+\vartheta h_1, a_2+\vartheta h_2)\right).\end{aligned}$$

Dokaz: Definirajmo

$$F : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$F(t) := f(a+th)$$

Označimo

$$\begin{aligned} A &= h_1D_1 + h_2D_2 + \ldots + h_nD_n \\ &= h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} h_jD_j \end{aligned}$$

Z indukcijo dokažemo, da je

$$F^{(k)}(t) = (A^k f)(a+th).$$

Za $k=0$ to velja, saj $F^{(0)}(t) = F(t) = f(a+th)$. Definirajmo $g = A^k f$ za nek fiksen k. Recimo, da formula $F^{(k)}(t) = g(a+th)$ velja za k, tedaj je

$$\begin{aligned} F^{(k+1)}(t) &= \frac{d}{dt}\left(F^{(k)}(t)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(g(a+th)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\big(g(a_1+th_1,\ldots,a_n+th_n)\big) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x_1}(a+th)\frac{d}{dt}(a_1+th_1) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n}(a+th)\frac{d}{dt}(a_n+th_n) \\ &= h_1(D_1g)(a+th) + \ldots + h_n(D_ng)(a+th) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} h_jD_j\right) g(a+th) \\ &= A(A^kf)(a+th) \\ &= (A^{k+1}f)(a+th), \end{aligned}$$

torej po principu matematične indukcije velja tudi za $k+1$. Uporabimo Taylorjevo formulo za funkcijo F na intervalu $[0,1]$, torej

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \ldots + \frac{1}{r!}F^{(r)}(0) + \frac{1}{(r+1)!}F^{(r+1)}(\vartheta).$$

$\square$

Posledica 3 *Naj bo vse tako kot v zgornjem izreku. Tedaj velja*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} h_j D_j \right)^k f \right] (a) + \mathcal{O}\left(\|h\|^{r+1} \right),$$

pri čemer je $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2}$.

Opomba: $\mathcal{O}(t)$ je količina, za katero velja

$$\left| \frac{\mathcal{O}(t)}{t} \right| \leq M \quad \text{pri} \quad t \to 0,$$

pri čemer je M neka pozitivna konstanta.

Dokaz: Ostanek zgornje vrste je

$$R_r = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_{r+1}=1}^{n} D_{i_1} D_{i_2} \ldots D_{i_{r+1}} f(a + \vartheta h) h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_{r+1}}.$$

Ker so po predpostavki odvodi zvezni, so v neki okolici točke a omejeni. Torej so vsi $|\ldots| \leq M$ na neki okolici točke a. Poleg tega je $|h_i| \leq \|h\|$. Sledi $|R_r| < M\|h\|^{r+1}$. Torej je število M odvisno le od r. □

1.10.1 Opomba o Taylorjevi vrsti

Če je $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G})$, lahko zapišemo vrsto

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} h_j D_j \right)^r f \right] (a).$$

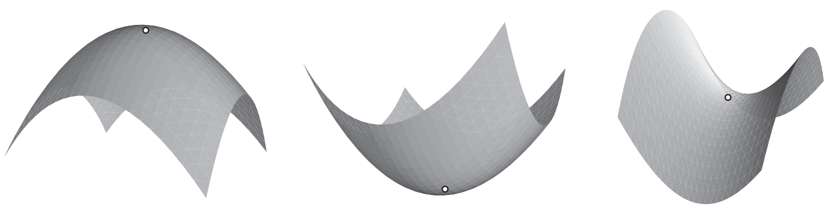
Lahko se zgodi, da vrsta konvergira le pri $h = 0$. Lahko se zgodi, da vrsta konvergira za majhne h, pa njena vsota ni enaka $f(a+h)$.

Zgornjo vsoto imenujemo ***Taylorjeva vrsta*** funkcije f v točki a.

Definicija 17 *Če za vse majhne h, $\|h\| < r$ za nek $r > 0$, zgornja vrsta konvergira in je njena vsota enaka $f(a+h)$, tedaj pravimo, da je f* ***analitična funkcija*** *v okolici točke a.*

1.11 Ekstremi funkcij več spremenljivk

Definicija 18 *Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ in $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$. Pravimo, da ima f v $a \in \mathcal{K}$* ***lokalni maksimum****, če obstaja $r > 0$, da je $f(x) \leq f(a)$ za vse $x \in \mathcal{K}$, za katere je $\|x-a\| < r$ in* ***lokalni minimum****, če obstaja $r > 0$, da je $f(x) \geq f(a)$ za vse $x \in \mathcal{K}$, za katere je $\|x-a\| < r$. Lokalne maksime in minime imenujemo* ***lokalni ekstremi****.*



Slika 1.15: Lokalni ekstremi

Izrek 17 *Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ in $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$. Naj ima f lokalni ekstrem v notranji točki a množice $\mathcal{K}$. Naj bo f diferenciabilna v točki a. Tedaj so v a vsi parcialni odvodi enaki 0, t.j.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 0, \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

oziroma

$$(Df)(a) = 0.$$

Dokaz: Funkcija $t \mapsto f(t, a_2, \ldots, a_n)$ ima lokalni ekstrem v $t = a_1$, je definirana v okolici a_1 in je v a_1 odvedljiva, funkcija $t \mapsto f(a_1, t, \ldots, a_n)$ ima lokalni ekstrem v $t = a_2$, je definirana v okolici a_2 in je v a_2 odvedljiva,..., funkcija $t \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, t)$ ima lokalni ekstrem v $t = a_n$, je definirana v okolici a_n in je v a_n odvedljiva. Od tod in znanih dejstev o funkcijah ene spremenljivke sledi:

$$\frac{d}{dt}\big(f(t, a_2, \ldots, a_n)\big)\Big|_{t=a_1} = 0,$$

t.j.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0.$$

Podobno sklepamo še za

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0, \qquad j \in \{2, 3, \ldots, n\}.$$

□

Definicija 19 *Točke v katerih je $(Df)(a) = 0$, t.j.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0, \qquad j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

*imenujemo **kritične točke funkcije** f ali **stacionarne točke funkcije** f.*

1.11.1 O zadostnih pogojih za nastop ekstrema v kritični točki

Naj bo $\mathcal{G}$ odprta množica v $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{G})$ in naj bo a kritična točka. Po Taylorjevi formuli je za majhne h

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + \frac{1}{1!}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} h_j D_j\right) f\right](a) + \frac{1}{2!}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} h_j D_j\right)^2 f\right](a+\vartheta h) \\
&= f(a) + \sum_{j=1}^{n} h_j (D_j f)(a) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_j h_k (D_j D_k f)(a+\vartheta h) \\
&= f(a) + \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a+\vartheta h) \\
&= f(a) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a+\vartheta h)
\end{aligned}$$

Zaradi zveznosti dvakratnih odvodov velja $D_k D_j f = D_j D_k f$ in

$$(D_j D_k f)(a+\vartheta h) = (D_j D_k f)(a) + \eta_{jk},$$

kjer $\eta_{jk} \to 0$ pri $\|h\| \to 0$. Sledi

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_j h_k (D_j D_k f)(a) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_{jk} h_j h_k\right).$$

Označimo $(D_j D_k f)(a) = A_{jk}$. Velja $A_{jk} = A_{kj}$ za vsak par i, j, saj so mešani odvodi zaradi zveznosti neodvisni od vrstnega reda odvajanja. Izraz

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{jk} h_j h_k =: Q(h)$$

je kvadratna forma, ki jo je mogoče zapisati kot $Q(h) = \langle Ah, h\rangle$, kjer je $A = [A_{jk}]$ simetrična matrika. Kvadratna forma Q je pozitivno definitna, če je $Q(h) > 0$ za vse $h \neq 0$ in negativno definitna, če je $Q(h) < 0$ za vse $h \neq 0$.

Izrek 18 *Naj bo $\mathcal{G}$ odprta množica v $\mathbb{R}^n$. Naj bo $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{G})$. Naj bo a kritična točka. Če je forma*

$$Q(h) := \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) h_j h_k$$

pozitivno definitna, ima f v točki a lokalni minimum. Če je forma $Q(h)$ negativno definitna, ima f v točki a lokalni maksimum.

Opomba: Lokalnega ekstrema ni, če Q zavzame tako pozitivne, kot tudi negativne vrednosti.

Opomba: Q je pozitivno definitna natanko takrat, ko so vse lastne vrednosti matrike Q pozitivne in negativno definitna, ko so vse lastne vrednosti Q negativne.

Opomba: Funkcija je $\mathcal{C}^2(\mathcal{G})$, zato je matrika A simetrična.

Dokaz: Naj bo Q pozitivno definitna kvadratna forma. Ker je Q kvadratna forma, velja $Q(\lambda h) = \lambda^2 Q(h)$. Ker je pozitivno definitna sledi, da njena zožitev na enotsko sfero $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ doseže svoj minimum m $(m > 0)$, t.j. $Q(z) \geq m$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\|z\| = 1$. Enotska sfera je kompaktna množica (zaprta in omejena), torej funkcija doseže svoj maksimum in svoj minimum. Pišimo $z = \frac{h}{\|h\|}$. Naj bo $r = \|h\|$, torej $h = rz$. Dobimo

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{1}{2}\left(Q(h) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_{jk} h_j h_k\right) \\ &= f(a) + \frac{1}{2}r^2\left(Q(h) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_{jk} z_j z_k\right). \end{aligned}$$

Ker je $\|z\| = 1$, je $|z_j| \leq 1$, za vsak j in je

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_{jk} z_j z_k\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |\eta_{jk}|.$$

Ker pri $r \to 0$ konvergira $\eta_{jk} \to 0$, sledi, da je izraz $\left|\sum_j \sum_k \eta_{jk} z_j z_k\right|$ poljubno majhen, če je le $r > 0$ dovolj majhen. Po drugi strani pa je $Q(z) \geq m$, zato je pri dovolj majhnih $r = \|h\|$ izraz v oklapaju zgoraj pozitiven, kar pomeni, da je $f(a+h) > f(a)$ za vse dovolj majhne $\|h\|$. V točki a nastopi torej strogi lokalni minimum. Podobno dokažemo, če je Q negativno definitna, je potem v a strogi lokalni maksimum.

Če Q zavzame tako pozitivne kot tudi negativne vrednosti, obstajata z_1, $\|z_1\| = 1$, $Q(z_1) > 0$ in z_2, $\|z_2\| = 1$, $Q(z_2) < 0$. V prvem primeru je izraz v oklepaju zgoraj pozitven za $h = rz_1$ za vse dovolj majhne $r > 0$. V drugem primeru je izraz v oklepaju zgoraj negativen za $h = rz_2$ za vse dovolj majhne $r > 0$. Lokalnega ekstrema potem ni. $\square$

Definicija 20 *Matriko drugih odvodov*

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\right]$$

imenujemo ***Hessejeva matrika*** *v točki a. Formo*

$$H(h) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) h_j h_i$$

pa ***Hessejeva forma*** *v točki a.*

Opomba: Zgornje možnosti ne izčrpajo vseh možnosti. Vzemimo npr. $f(x,y) = x^4 + y^4$. Točka $(0,0)$ je točka globalnega minimuma, vendar je Hessejeva forma v tej točki enaka 0, saj so vsi odvodi drugega reda v tej točki enaki 0.

Trditev 2 *Naj bo*

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

in

$$H(h) = \langle Bh, h\rangle.$$

Tedaj je H pozitivno definitna natanko tedaj, ko je $a > 0$ in $\det(B) > 0$.

Dokaz: $(\Rightarrow)$ Kvadratna forma H je oblike

$$\begin{aligned} H(h) &= ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 \\ &= a\left(h_1 + \frac{b}{a}h_2\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)h_2^2 \end{aligned}$$

Če je H pozitivno definitna, t.j. $H(h) > 0$, za $h \neq 0$.

- za $h_1 \neq 0$ in $h_2 = 0$, dobimo $H(h) = ah_1^2 > 0$, od koder sledi $a > 0$.
- za $h_1 = -b/(ah_2)$ je $H(h) = (c - b^2/a)h_2^2$, od koder sledi $c - b^2/a > 0$ oz. $ac - b^2 > 0$, kar pomeni $\det(B) > 0$.

($\Leftarrow$) Če je $a > 0$ in $ac - b^2 > 0$, je $H(h) \geq 0$. Iz $H(h) = 0$ sledi $h_2 = 0$ in $ah_1^2 = 0$ in od tod $h_1 = 0$. Torej $H(h)$ pozitivna za vse $h \neq 0$, t.j. H je pozitivno definitna. $\square$

Opomba: B je pozitivno definitna, če je $-B$ negativno definitna. Torej je B negativno definitna natanko tedaj, ko je $a < 0$ in $\det(B) = ac - b^2 > 0$.

Opomba: Če je $\det(B) = ac - b^2 < 0$, ima B eno pozitivno in eno negativno lastno vrednost.

Posledica 4 *Naj bo $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ odprta. Naj bo*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0,$$

t.j. (a,b) je kritična točka. Če je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 > 0,$$

tedaj v točki (a,b) nastopi lokalni ekstrem. Če je $\partial^2 f/\partial x^2(a,b) > 0$ je to lokalni minimum. Če je $\partial^2 f/\partial x^2(a,b) < 0$ je to lokalni maksimum.

Opomba: Hessejeva matrika je

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix},$$

Hessejeva forma pa

$$\tfrac{1}{2}\langle Bh, h\rangle.$$

1.12 Vezani ekstremi

Naj bo f funkcija razreda $\mathcal{C}^1$ definirana v okolici točke $a \in \mathbb{R}^n$. Naj bo $f(a) = 0$ in $(Df)(a) \neq 0$. Tedaj vemo, da je v okolici $\mathcal{U}$ točke a množica $\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{U} : f(x) = 0\}$ mnogoterost dimenzije $n-1$. Tangentni prostor $T_a\mathcal{M}$ dobimo tako, da gledamo vse gladke poti $\psi : (-\delta, \delta) \to \mathcal{M}$, $\psi(0) = a$ in si ogledamo množico vektorjev $\psi'(0)$. Množica vseh teh bo ravno $T_a\mathcal{M}$. Torej je

$$f\big(\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)\big) = 0$$

za vse $t \in (-\delta, \delta)$. Torej je

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\big)\psi_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\big(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\big)\psi_n'(t) = 0.$$

Pri $t = 0$ je torej

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\psi_1'(0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\psi_n'(0) = 0.$$

Tangentni vektor $\big(\psi_1'(0), \ldots, \psi_n'(0)\big)$ je torej pravokoten na vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Vektor $\big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\big)$ imenujemo ***gradient funkcije*** f v točki a in ga označimo z

$$(\operatorname{grad} f)(a) \quad \text{oz.} \quad (\nabla f)(a).$$

Mogoče je pokazati, da je $T_a\mathcal{M}$ natanko podprostor vseh vektorjev, ki so pravokotni na $(\operatorname{grad} f)(a)$.

Če imamo splošno mnogoterost, dano z

$$\mathcal{M} = \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad \ldots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$$

če je $a \in \mathcal{M}$, mora imeti matrika

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}, \quad (m \leq n)$$

maksimalen rang, t.j. njene vrstice so linearno neodvisne, t.j. vektorji $(\operatorname{grad} g_1)(a)$, …,$(\operatorname{grad} g_m)(a)$ so linearno neodvisni. V tem primeru se preprosto vidi, da je $T_a\mathcal{M}$ linearen podprostor vseh vektorjev, ki so hkrati pravokotni na vse gradiente.

Trditev 3 *Naj bo $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ in $\mathcal{P}$ linearen podprostor v $\mathbb{R}^n$. Naj velja*

$$\{x\} \perp \mathcal{P} \Rightarrow x \perp a.$$

Tedaj je $a \in \mathcal{P}$.

Opomba: Vektor x je pravokoten na $\mathcal{P}$, ko je pravokoten na vsak vektor iz $\mathcal{P}$.

Dokaz: Razstavimo $a = a_{\mathcal{P}} + \tilde{a}$, kjer je $\{a\}_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}$ in $\{\tilde{a}\} \perp \mathcal{P}$. Tedaj je $\tilde{a} \perp \mathcal{P}$, torej $\tilde{a} \perp a$ po predpostavki. Sledi $\langle \tilde{a}, a\rangle = \langle \tilde{a}, a_{\mathcal{P}}\rangle + \langle \tilde{a}, \tilde{a}\rangle$. Od tod sledi $\langle \tilde{a}, \tilde{a}\rangle = 0$ oz. $\tilde{a} = 0$ in od tod $a = a_{\mathcal{P}}$. Torej $a \in \mathcal{P}$. □

V nadaljevanju bomo iskali lokalne ekstreme gladke funkcije f,

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

pri dodatnih pogojih

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\cdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Torej vzamemo v poštev le tiste n-terice $(x_1, \ldots, x_n)$, ki izpolnjuje zgornje dodatne pogoje. Vse funkcije naj bodo razreda $\mathcal{C}^1$. Tipičen primer bi se glasil: iščemo lokalne ekstreme funkcije $f(x, y, z) = 2x - y + z$, ob pogoju $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. To pomeni, da iščemo lokalne ekstreme funkcije f zožene na sfero $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Natančneje povedano; f ima v a lokalni vezani minimum, če obstaja nek

$\delta > 0$, da je $f(x) \geq f(a)$ za vse $x = (x_1, \ldots, x_n)$, za katere velja $\|x - a\| < \delta$ in

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$$
$$g_2(x_1, \ldots, x_n) = 0$$
$$\ldots$$
$$g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Podobno seveda velja za lokalni vezani maksimum.

Izrek 19 *Naj ima funkcija $f \in \mathcal{C}^1$, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, v točki a* ***vezan lokalni ekstrem*** *ob pogojih*

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$$
$$g_2(x_1, \ldots, x_n) = 0$$
$$\ldots$$
$$g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

kjer so $g_i \in \mathcal{C}^1$ za $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ funkcije v okolici točke a (in seveda $g_1(a_1, \ldots, a_n) = g_2(a_1, \ldots, a_n) = \ldots = g_m(a_1, \ldots, a_n) = 0$). Naj bodo gradienti

$$(\operatorname{grad} g_1)(a),\ (\operatorname{grad} g_2)(a), \ldots,\ (\operatorname{grad} g_m)(a)$$

linearno neodvisni. Tedaj obstajajo realna števila $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, da je a stacionarna točka funkcije

$$F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \ldots - \lambda_m g_m.$$

Dokaz: Ker so $(\operatorname{grad} g_i)(a)$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ linearno neodvisni, je v okolici a skupna rešitev enačb, ki opisujejo dodatne pogoje neka mnogoterost $\mathcal{M}$.

$$\mathcal{M} = \big\{x \in \mathcal{U} : g_j(x) = 0, i \in \{1, 2, \ldots, m\}\big\}$$

Naj bo h poljuben vektor iz $T_a\mathcal{M}$. Tedaj obstaja gladka pot $t \mapsto \psi(t) \in \mathcal{M}$, da je $\psi(0) = a$ in $\psi'(0) = h$. Ker je v točki a lokalen vezan ekstrem funkcije f, ima funkcija $t \mapsto f\big(\psi(t)\big)$ lokalen ekstrem pri $t = 0$, ko je $\psi(0) = a$. Zato je

$$\frac{d}{dt}\left[f\big(\psi(t)\big)\right]_{t=0} = 0,$$

t.j.

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\psi(t)\big)\psi_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\big(\psi(t)\big)\psi_n'(t)\right]_{t=0} = 0$$

oziroma

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\psi_1'(0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\psi_n'(0)\right] = 0,$$

kar pa je naprej enako

$$\left\langle \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right], [\psi_1'(0), \ldots, \psi_n'(0)] \right\rangle = \langle (\operatorname{grad} f)(a), h \rangle = 0.$$

Pokazali smo torej, da je vsak $h \in T_a\mathcal{M}$ pravokoten na $(\operatorname{grad} f)(a)$. Ker je $T_a\mathcal{M}$ natanko prostor vseh vektorjev, ki so pravokotni na $(\operatorname{grad} g_j)(a)$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, sledi: če je $h \perp (\operatorname{grad} g_j)(a)$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, je $h \perp (\operatorname{grad} f)(a)$. Če označimo s $\mathcal{P}$ podprostor, napet na $(\operatorname{grad} g_j)(a)$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, smo dobili:

$$\{h\} \perp \mathcal{P} \Rightarrow h \perp (\operatorname{grad} f)(a).$$

Po trditvi zgoraj sledi, da je $(\operatorname{grad} f)(a) \in \mathcal{P}$, t.j. obstajajo natanko določeni λ_j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, da je

$$(\operatorname{grad} f)(a) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\operatorname{grad} g_j)(a).$$

Torej

$$(\operatorname{grad} f)(a) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\operatorname{grad} g_j)(a) = 0.$$

To pomeni (če pogledamo po komponentah)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_1}(a) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_2}(a) = 0$$

$$\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(a) = 0.$$

Torej je a res kritična točka funkcije $f - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j$. $\square$

Opomba: Če $(\operatorname{grad} g_j)(a)$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, niso linearno neodvisni, je $\mathcal{M}$ lahko karkoli. Takrat naš izrek ne velja v splošnem. Potrebno je vsak primer obravnavati posebej.

Števila λ_j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ imenujemo ***Lagrangeovi množitelji***. Od tod sledi Lagrangeova metoda za iskanje kandidatnih točk za lokalne vezane ekstreme.

Recimo, da iščemo lokalne vezane ekstreme funkcije $f \in \mathcal{C}^1$, ob pogojih

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\ldots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Kandidatne točke za take ekstreme dobimo na naslednji način; najprej tvorimo funkcijo F

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

in poiščemo njene stacionarne točke. Pri tem je

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n, \nu_1, \ldots, \nu_m) &= 0 \\ &\ldots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n, \nu_1, \ldots, \nu_m) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}(a_1, \ldots, a_n, \nu_1, \ldots, \nu_m) &= 0 \\ &\ldots \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_m}(a_1, \ldots, a_n, \nu_1, \ldots, \nu_m) &= 0, \end{aligned}$$

kjer je $(a_1, \ldots, a_n, \nu_1, \ldots, \nu_m)$ stacionarna točka funkcije F. Zadnje enačbe, t.j.

tiste, ki jih odvajamo po λ_j, so ravno

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\ldots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Iz vseh $n+m$-enačb določimo točko $(a_1, \ldots, a_n, \nu_1, \ldots, \nu_m)$. Tako dobljena točka $(a_1, \ldots, a_n)$ je ***kandidatna točka*** za naš lokalen vezan ekstrem.

Zgled: Poišči kandidatne točke za lokalen maksimum funkcije, ki je dana s predpisom

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2,$$

pri pogoju

$$x + y = 1.$$

Tvorimo funkcijo F,

$$F(x, y, \lambda) = -x^2 - y^2 + 2 - \lambda(x + y - 1).$$

Sledi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -2x - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -2y - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= -x - y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Iz zgornjega sistema enačb dobimo: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ in $\lambda = -1$. $\Diamond$

Opomba: Zgornji primer bi lahko prevedli na problem iskanja ekstrema funkcije ene spremenljivke.

Poglavje 2

Integrali s parametrom

Nekaj izrekov bi radi s funkcijskih vrst posplošili na integrale. Pri funkcijskih vrstah smo med drugim dokazali: če so funkcije f_n zvezne na intervalu $[a,b]$ in vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ enakomerno konvergira, je funkcija f, dana s predpisom $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, zvezna na $[a,b]$.

V zgornjem zapisu bi radi znak $\sum$ nadomestili z $\int$. Radi bi tudi vedeli, kdaj je funkcija $x \mapsto \int_u^v F(x,t)dt$ zvezna, odvedljiva, integrabilna? Izreke iz funkcijskih vrst pa bomo še malo posplošili, saj lahko pri integralu

$$G(x,u,v) = \int_u^v F(x,t)dt$$

spreminjamo še meji u in v.

Definicija 21 *Množica $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ je lokalno zaprta, če za vsak $x \in \mathcal{X}$ obstaja $r > 0$, da je $\mathcal{X} \cap \overline{\mathcal{K}}$ zaprta množica v $\mathbb{R}^n$, t.j.*

$$\overline{\mathcal{K}}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\}.$$

Zgled:

(a) Vsaka zaprta množica $\mathcal{X}$ je lokalno zaprta, saj je presek zaprte množice $\mathcal{X}$ z zaprto množico $\overline{\mathcal{K}}(x,r)$ vedno zaprt.

(b) Vsaka odprta množica je tudi lokalno zaprta. Če je $\mathcal{X}$ odprta in $x \in \mathcal{X}$ vemo, da obstaja $r > 0$, da je $\mathcal{K}(x,r) \subset \mathcal{X}$. Tedaj je $\overline{\mathcal{K}}(x,r/2) \subset \overline{\mathcal{K}}(x,r) \subset \mathcal{X}$, torej $\overline{\mathcal{K}}(x,r/2) \cap \mathcal{X} = \overline{\mathcal{K}}(x,r/2)$ zaprta.

(c) Če je $\mathcal{X}$ = (odprta množica) $\cup$ (zaprta množica), sledi, da je $\mathcal{X}$ lokalno zaprta.

$\Diamond$

Izrek 20 (o zveznosti integrala s parametrom) *Naj bo $\mathcal{I} = [a, b]$ in $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ lokalno zaprta množica. Naj bo $f : \mathcal{I} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je funkcija $G : \mathcal{X} \times \mathcal{I} \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, definirana s formulo*

$$G(x, u, w) = \int_u^w f(t, x)dt$$

zvezna.

Opomba: če je f zvezna funkcija spremenljivk x in t, je G, dana s predpisom

$$G(x, u, w) = \int_u^w f(t, x)dt,$$

zvezna funkcija spremenljivk (x, u, w).

Dokaz: Naj bo $(x_0, u_0, w_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{I} \times \mathcal{I}$. Če je tudi $(x, u, w) \in \mathcal{X} \times \mathcal{I} \times \mathcal{I}$, je

$$\begin{aligned}
|G(x,&u, w) - G(x_0, u_0, w_0)| = \\
&= \left| \int_u^w f(t, x)dt - \int_{u_0}^{w_0} f(t, x_0)dt \right| \\
&= \left| \int_u^{u_0} + \int_{u_0}^{w_0} + \int_{w_0}^{w} f(t, x)dt - \int_{u_0}^{w_0} f(t, x_0)dt \right| \\
&= \left| \int_{u_0}^{w_0} \big(f(t, x) - f(t, x_0)\big)dt + \int_u^{u_0} + \int_{w_0}^{w} f(t, x)dt \right| \\
&\le \underbrace{\int_{u_0}^{w_0} |f(t, x) - f(t, x_0)|dt}_{A} + \underbrace{\left| \int_u^{u_0} f(t, x)dt \right|}_{B} + \underbrace{\left| \int_{w_0}^{w} f(t, x)dt \right|}_{C}
\end{aligned}$$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Izberimo $r > 0$ tak, da je $\mathcal{X} \cap \overline{\mathcal{K}}(x_0, r)$ zaprta v $\mathbb{R}^n$ (saj je $\mathcal{X}$ lokalno zaprta). Množica $\mathcal{X} \cap \overline{\mathcal{K}}(x_0, r)$ je zaprta omejena v $\mathbb{R}^n$, zato je $\mathcal{I} \times \big(\mathcal{X} \cap \overline{\mathcal{K}}(x_0, r)\big)$ zaprta in omejena v $\mathbb{R}^{n+1}$, torej kompaktna. Funkcija f je na tej množici zvezna, zato je na njej enakomerno zvezna, torej obstaja $\delta < r$, da za $(t', x'), (t'', x'') \in \mathcal{I} \times \big(\mathcal{X} \cap \overline{\mathcal{K}}(x_0, r)\big)$ taka, da je

$$|t' - t''| < \delta \quad \text{in} \quad \|x' - x''\| < \delta,$$

in velja

$$|f(t'', x'') - f(t', x')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

V posebnem primeru; za vsak x, $|x - x_0| < \delta$ velja $(t' = t'' = t)$

$$|f(t, x) - f(t, x_0)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

za vsak $t \in [a, b]$. Torej je

$$\begin{aligned} A &\leq \int_a^b |f(t, x) - f(t, x_0)| dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \int_a^b dt \\ &= \frac{\varepsilon}{3(b-a)} (b-a) \end{aligned}$$

oziroma $A \leq \varepsilon/3$ za $|x - x_0| < \delta$.

Zaradi kompaktnosti $\mathcal{I} \times \big(\mathcal{X} \cap \overline{\mathcal{K}}(x_0, r)\big)$ je zvezna funkcija f na tej množici omejena, t.j. obstaja $M < \infty$, da je $|f(t, x)| \leq M$ za vsak $(t, x) \in \mathcal{I} \times \big(\mathcal{X} \cap \overline{\mathcal{K}}(x_0, r)\big)$. Če je $|u - u_0| < \varepsilon/(3M)$ in $u < u_0$, je

$$\begin{aligned} \left| \int_u^{u_0} f(t, x) dt \right| &\leq \int_u^{u_0} M dt \\ &\leq M(u_0 - u) \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{3M} \\ &= \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Za $u_0 < u$ velja enako, t.j. $B < \varepsilon/3$. Če je $|w - w_0| < \varepsilon/(3M)$, je $C < \varepsilon/3$. Če je torej $|x - x_0| < \delta$, $|u - u_0| < \varepsilon/(3M)$, $|w - w_0| < \varepsilon/(3M)$, je

$$|G(x, u, w) - G(x_0, u_0, w_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

t.j. za vsak $\varepsilon > 0$ smo našli $\delta_1 > 0$, da je

$$|G(x, u, w) - G(x_0, u_0, w_0)| \leq \varepsilon,$$

čim je $|x - x_0| < \delta_1$, $|u - u_0| < \delta_1$, $|w - w_0| < \delta_1$. Torej je G res zvezna v točki (x_0, u_0, w_0). $\square$

Posledica 5 *Naj bo* $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ *lokalno zaprta množica in* $f : [a,b] \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *zvezna. Tedaj je* F,

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)dt,$$

zvezna funkcija na $\mathcal{X}$.

Izrek 21 (o odvajanju integrala s parametrom) *Naj bo* $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ *odprt interval in* $f : [a,b] \times \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija. Naj za vsak* $(t,x) \in [a,b] \times \mathcal{J}$ *obstaja* $\partial f/\partial x(t,x)$ *in naj bo* $\partial f/\partial x$ *zvezna funkcija na* $[a,b] \times \mathcal{J}$. *Tedaj velja*

i) funkcija F,

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)dt,$$

je zvezno odvedljiva na $\mathcal{J}$ *in velja*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt,$$

za $x \in \mathcal{J}$.

ii) za poljubni zvezno odvedljivi funkciji $\alpha, \beta : \mathcal{J} \to [a,b]$ *je funkcija* G,

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t,x)dt,$$

zvezno odvedljiva na $\mathcal{J}$ *in velja*

$$G'(x) = f(\beta(x),x)\beta'(x) - f(\alpha(x),x)\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

Opomba: Izrek v bistvu pove kdaj lahko naredimo naslednje:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(t,x)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)dt,$$

t.j. kdaj lahko zamenjamo vrstni red odvajanja in integriranja (tako kot pri vrstah: $d/dt \sum = \sum d/dt$).

Dokaz: Uporabimo Lagrangeov izrek. Za vsak t, h obstaja $\vartheta(t,h)$, $0 < \vartheta(t,h) < 1$, da je

$$\frac{f(t,x+h) - f(t,h)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x + \vartheta(t,h)h).$$

Torej je

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt\right| = \\
&= \left|\frac{1}{h}\left(\int_a^b f(t,x+h) - \int_a^b f(t,x)dt\right) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt\right| \\
&= \left|\int_a^b \left(\frac{f(t,x+h)-f(t,x)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right) dt\right| \\
&= \left|\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,x+\vartheta(t)h) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right) dt\right| \\
&\le \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x+\vartheta(t)h) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| dt.
\end{aligned}$$

Izrek za (i) bomo dokazali, če pokažemo, da je zadnji izraz poljubno majhen, če je le h dovolj majhen.

Izberimo $\eta > 0$, da je $[x-\eta, x+\eta] \subset \mathcal{J}$. Funkcija $\partial f/\partial x$ je zvezna na množici $[a,b] \times [x-\eta, x+\eta]$, ki je kompaktna v $\mathbb{R}^2$, zato je $\partial f/\partial x$ na tej množici enakomerno zvezna. Torej lahko za vsak $\varepsilon > 0$ izberemo $\delta > 0$, da iz $t', t'' \in [a,b]$, $x', x'' \in [x-\eta, x+\eta]$,

$$|t'-t''| < \delta \text{ in } |x'-x''| < \delta$$

sledi

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t',x') - \frac{\partial f}{\partial x}(t'',x'')\right| < \varepsilon.$$

Torej iz $|h| < \delta$ in $|h| < \eta$ sledi

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x+\vartheta(t,h)h) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| < \varepsilon,$$

za vsak $t \in [a,b]$, saj je $|\vartheta(t,h)h| \le |h|$. Torej je

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt\right| &\le \varepsilon \int_a^b dt \\
&= \varepsilon(b-a),
\end{aligned}$$

pri čemer smo vzeli $|h| < \min\{\delta, \eta\}$. Torej je izraz v $|\ldots|$ poljubno majhen, če je le $|h|$ dovolj majhen. Zato je

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

(ii) Najprej definirajmo funkcijo H,

$$\begin{aligned} H &: \mathcal{J} \times [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}, \\ H(x,u,w) &= \int_u^w f(t,x)dt. \end{aligned}$$

Po zgornjem delu je H za fiksna u in w odvedljiva po x in

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,u,w) = \int_u^w \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

Za fiksen x in fiksen u je po osnovnem izreku integralskega računa,

$$\frac{\partial H}{\partial w} = f(w,x),$$

za fiksen x in fiksen w pa

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -f(w,u).$$

Odvodi so zvezni, prvi po izreku zgoraj, drugi pa po predpostavki. Torej je $H \in \mathcal{C}^1(\mathcal{J} \times [a,b] \times [a,b])$. Jasno je $G(x) = H\big(x, \alpha(x), \beta(x)\big)$, torej

$$\begin{aligned} G'(x) = \frac{\partial H}{\partial x}\big(x,\alpha(x),\beta(x)\big)\frac{dx}{dx} + \\ + \frac{\partial H}{\partial u}\big(x,\alpha(x),\beta(x)\big)\frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial H}{\partial w}\big(x,\alpha(x),\beta(x)\big)\frac{d\beta}{dx} \\ = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt + f(\beta(x),x)\beta'(x) - f(\alpha(x),x)\alpha'(x). \end{aligned}$$

□

Posledica 6 *Naj bo $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ odprta in $f : [a,b] \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ funkcija. Naj za vsak $(t,x) \in [a,b] \times \mathcal{G}$ obstajajo*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x), \quad j \in \{1,2,\ldots,n\},$$

ki naj bodo zvezne funkcije na $[a,b] \times \mathcal{G}$. Tedaj je funkcija F dana s predpisom

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)dt$$

razreda $\mathcal{C}^1$ na $\mathcal{G}$ in velja

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x_j}(t,x)dt, \quad j \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Izrek 22 (o integraciji integrala s parametrom) *Naj bo f zvezna funkcija na $[a,b]\times[c,d]$ in $F(x)=\int_a^b f(t,x)dt$ (Vemo že, da je $F:[c,d]\to\mathbb{R}$ zvezna). Tedaj velja*

$$\int_c^d F(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(t,x)dx\right)dt,$$

oziroma

$$\int_c^d dx \int_a^b f(t,x)dt = \int_a^b dt \int_c^d f(t,x)dx.$$

Opomba: označili bomo:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(t,x)dx\right)dt := \int_c^d dx \int_a^b f(t,x)dt.$$

Pripomnimo še, da integrala

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(t,x)dt\right)dx = \int_c^d dx \int_a^b f(t,x)dt$$

in

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(t,x)dx\right)dt = \int_a^b dx \int_c^d f(t,x)dx$$

imenujemo dvakratna integrala (in *ne* dvojna integrala). Izrek torej reče, da sta oba dvakratna integrala enaka.

Dokaz: Naj bo $F(x)=\int_a^b f(t,x)dt$. Definirajmo

$$\Phi(y) = \int_c^y F(x)dx.$$

Vemo, da je F zvezna in

$$g(t,y) = \int_c^y f(t,x)dx,$$

$$\Psi(y) = \int_a^b g(t,y)dt.$$

Tedaj je $\Phi'(y)\equiv F(y)$. To vemo, saj je zaradi zveznosti F to ravno osnovni izrek integralskega računa, t.j.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(t)dt = \varphi(x),$$

če je φ zvezna. Isti izrek pokaže tudi

$$(*) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(t,y) \equiv f(t,y).$$

Funkcija Φ je razreda $\mathcal{C}^1$. Ker je $\partial g/\partial y$ zvezna, saj je f po predpostavki zvezna, je potem tudi Ψ razreda $\mathcal{C}^1$, saj je

$$\Psi'(y) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(t,y)dt$$

zvezna funkcija parametra y. Zato

$$\begin{aligned}\Psi'(y) &= \int_a^{b'} \frac{\partial g}{\partial y}(t,y)dt \\ &\overset{(*)}{=} \int_a^b f(t,y)dt \\ &= F(y) \\ &= \Phi'(y),\end{aligned}$$

torej $\Psi'(y) = \Phi'(y)$. Od tod sledi, da je $\Psi - \Phi$ konstantna. Pri $y = 0$ je $\Phi(c) = 0$ in $\Psi(c) = 0$, saj je $g(t,c) = 0$. Od tod torej $\Psi \equiv \Phi$, oziroma

$$\int_c^y F(x)dx = \int_a^b g(t,y)dt,$$

za vsak y. Od sledi

$$\int_c^y F(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^y f(t,x)dx\right) dt,$$

in pri $y = d$

$$\int_c^d F(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(t,x)dx\right) dt.$$

□

2.1 Posplošeni (izlimitirani) integral

Ogledali si bomo le integrale tipa $\int_a^\infty$ in analogno sklepali tudi za druge posplošene integrale. Študirali bomo torej integral

$$\int_a^\infty f(t,x)dt.$$

Definicija 22 *Naj bo $\mathcal{X}$ neka množica in $f : [a,\infty) \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ funkcija, taka da je za vsak $x \in \mathcal{X}$ funkcija $t \mapsto f(t,x)$ zvezna na $[a,\infty)$. Naj za vsak $x \in \mathcal{X}$*

obstaja

$$\int_a^\infty f(t,x)dt.$$

Pravimo, da je

$$\int_a^\infty f(t,x)dt$$

enakomerno konvergenten (na $\mathcal{X}$*), če za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja* $b \in [a,\infty)$*, da za vsak* $c > b$ *velja*

$$\left|\int_a^\infty f(t,x)dt - \int_a^c f(t,x)dt\right| < \varepsilon,$$

torej

$$\left|\int_c^\infty f(t,x)dt\right| < \varepsilon$$

za vsak $x \in \mathcal{X}$*.*

To pomeni, da je v

$$\int_a^\infty f(t,x)dt = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t,x)dt$$

limita enakomerna po x. Pomembno je torej, da je mogoče v definiciji izbrati b, ki je hkrati dober za vse $x \in \mathcal{X}$.

Spomnimo se iz Analize I: $\sum f_n(x) \to s(x)$ enakomerno za $x \in \mathcal{X}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je za vse $n \geq n_0$ $|\sum_{j=1}^n f_j(x) - s(x)| < \varepsilon$ za vsak $x \in \mathcal{X}$. Spomnimo se tudi na Weierstrassov M-test za enakomerno konvergenco. Če je $|f_n(x)| \leq t_n$, za vsak $x \in \mathcal{X}$ in $n \in \mathbb{N}$ in če vrsta $\sum t_n$ konvergira, tedaj vrsta $\sum f_n(x)$ konvergira enakomerno na $\mathcal{X}$. Podobno velja tudi v našem primeru.

Trditev 4 *Naj bo* $\mathcal{X}$ *neka množica,* $f : [a,\infty) \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija na* $[a,\infty)$ *za vsak* $x \in \mathcal{X}$*. Naj obstaja funkcija* $\varphi : [a,\infty) \to \mathbb{R}_+$ *zvezna, da je* $|f(t,x)| \leq \varphi(t)$, $t \in [a,\infty)$ *za vse* $x \in \mathcal{X}$ *in naj*

$$\int_a^\infty \varphi(t)dt$$

konvergira (obstaja). Tedaj

$$\int_a^\infty f(t,x)dt$$

konvergira enakomerno na $\mathcal{X}$*.*

Dokaz: Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker $\int_a^\infty \varphi(t)dt$ konvergira, obstaja $b < \infty$, da za vsak $c > b$ velja

$$\int_c^\infty \varphi(t)dt < \varepsilon.$$

Sledi

$$\begin{aligned}\left|\int_a^\infty f(t,x)dt - \int_a^c f(t,x)dt\right| &= \left|\int_c^\infty f(t,x)dt\right| \\ &\leq \int_c^\infty |f(t,x)|\, dt \\ &\leq \int_c^\infty \varphi(t)dt < \varepsilon,\end{aligned}$$

za vse $x \in \mathcal{X}$. Torej $\int_a^\infty f(t,x)dt$ konvergira enakomerno na $\mathcal{X}$. $\square$

Izrek 23 (o zveznosti posplošenega integrala s parametrom) *Naj bo $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ lokalno zaprta množica, $f : [a,\infty) \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in naj*

$$\int_a^\infty f(t,x)dt$$

konvergira lokalno enakomerno na $\mathcal{X}$, t.j. za vsak $y \in \mathcal{X}$ obstaja $r > 0$, da $\int_a^\infty f(t,x)dt$ konvergira enakomerno na množici $\{x \in \mathcal{X} : \|x-y\| < r\}$. Tedaj je

$$x \mapsto \int_a^\infty f(t,x)dt$$

zvezna funkcija na $\mathcal{X}$.

Dokaz: Naj bo $x \in \mathcal{X}$ in naj bo $\varepsilon > 0$. Zaradi lokalne enakomerne konvergence obstajata $r > 0$ in $c < \infty$, da je

$$\left|\int_a^\infty f(t,y)dt - \int_a^c f(t,y)dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

za vse $y \in \mathcal{X}$, za katere velja $\|y-x\| < r$. Po znanem izreku je

$$y \mapsto \int_a^c f(t,y)dt$$

zvezna na $\mathcal{X}$. Torej obstaja $\delta > 0$, da je

$$\left|\int_a^c f(t,y)dt - \int_a^c f(t,x)dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

za vse $y \in \mathcal{X}$, za katere velja $\|y - x\| < \delta$. Če je torej $\|y - x\| < \min\{r, \delta\}$, je

$$
\begin{aligned}
\left| \int_a^\infty f(t,y)dt - \int_a^\infty f(t,x)dt \right| &\leq \left| \int_a^\infty f(t,y)dt - \int_a^c f(t,y)dt \right| \\
&+ \left| \int_a^c f(t,y)dt - \int_a^c f(t,x)dt \right| \\
&+ \left| \int_a^c f(t,x)dt - \int_a^\infty f(t,x)dt \right| \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Torej je $x \mapsto \int_a^\infty f(t,x)dt$ zvezna v $x \in \mathcal{X}$. □

Izrek 24 *Naj bo $f : [a, \infty) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Naj bo integral*

$$F(x) = \int_a^\infty f(t,x)dt$$

enakomerno oknvergenten na $[c, d]$. Tedaj je (že vemo, da je F zvezna in)

$$\int_c^d F(x)dx = \int_a^\infty dt \int_c^d f(t,x)dx,$$

torej

$$\int_c^d dx \int_a^\infty f(t,x)dt = \int_a^\infty dt \int_c^d f(t,x)dx.$$

Dokaz: Za vsak $b > a$ definirajmo

$$F_b(x) = \int_a^b f(t,x)dt.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je integral enakomerno konvergenten na $[c, d]$, obstaja $b < \infty$, da je

$$|F(x) - F_{b'}(x)| < \varepsilon,$$

za vse $x \in [c, d]$ in vse $b' > b$. Torej je

$$\lim_{b \to \infty} F_b(x) = F(x),$$

kjer je konvergenca enakomerna na $[c, d]$.

Naj bo $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ poljubno zaporedje, $b_n \to \infty$. Funkcije F_{b_n} konvergirajo enakomerno k F, zato je

$$\lim_{n \to \infty} \int_c^d F_{p_n}(x) = \int_c^d F(x)dx.$$

(To sledi iz znanega izreka iz Analize 1) Naše funkcije so zvezne funkcije spremenljivke x na $[c,d]$, t.j. F_{b_n} zvezna, ker so integralske meje končne, F pa kot enakomerna limita. Torej je

$$\begin{aligned}\int_c^d F(x) &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_c^d dx\int_a^{b_n} f(t,x)dt\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^{b_n} dt\int_c^d f(t,x)dx\right).\end{aligned}$$

Po definiciji posplošenega integrala je to naprej enako

$$\int_a^\infty dt\int_c^d f(t,x)dx.$$

□

Izrek 25 *Naj bo $\mathcal{J}$ odprt interval in $f:[a,\infty)\times\mathcal{J}\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija. Naj bo f parcialno odvedljiva na drugo spremenljivko in naj bo $\partial f/\partial x$ zvezna funkcija na $[a,\infty)\times\mathcal{J}$. Naj za vsak $x\in\mathcal{J}$ integral*

$$F(x)=\int_a^\infty f(t,x)dt$$

konvergira in naj integral iz odvodov

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$$

lokalno enakomerno konvergira na $\mathcal{J}$, t.j. za vsak $x\in\mathcal{J}$ obstaja interval $\mathcal{I}\subset\mathcal{J}$, s središčem v x, da

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$$

konvergira enakomerno na $\mathcal{I}$. Tedaj je $F\in\mathcal{C}^1(\mathcal{J})$ in

$$F'(x)=\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

Torej je pod temi pogoji dovoljena menjava obeh limitnih procesov, t.j.

$$\frac{d}{dx}\int_a^\infty f(t,x)dt=\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

Dokaz: Naj bo

$$G(x)=\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

Naj bo $y \in \mathcal{J}$. Tedaj po predpostavki obstaja okolica od y, na kateri ta integral enakomerno konvergira, t.j.

$$G_b(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$$

na tej okolici enakomerno konvergirajo k $G(x)$. Pišimo

$$F_b(x) = \int_a^b f(t,x)dt.$$

Od prej vemo, t.j. iz odvajanja pri končnih mejah, da je $F_b'(x) = G_b(x)$ za vse x v tej okolici. Naj bo $b_n \to \infty$. Vemo $F_{b_n}(x) \to F(x)$ za vsak $x \in \mathcal{J}$, saj integral $\int_a^\infty f(t,x)dt$ konvergira za vsak $x \in \mathcal{J}$ in $F_{b_n}'(x) \to G(x)$ enakomerno za vse x v okolici y. Po znanem izreku iz Analize 1 sledi, da je $G(x) = F'(x)$ za vse x v okolici y. Ker je bil $y \in \mathcal{J}$ poljuben, to velja za vse $x \in \mathcal{J}$, torej

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt = \left[\int_a^\infty f(t,x)dt\right]'.$$

Iz zgornjega izreka sledi tudi, da je funkcija G zvezna na $\mathcal{J}$, saj je integrand $\partial f/\partial x(t,x)$ zvezen, integral $\int_a^\infty \partial f/\partial x(t,x)dt$ pa konvergira lokalno enakomerno. Torej je F razreda $\mathcal{C}^1$. $\square$

Posledica 7 *Maj bo $\mathcal{G}$ odprta množica v $\mathbb{R}^n$ in $f : [a,\infty) \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Naj povsod na $[a,\infty) \times \mathcal{G}$ obstajajo odvodi $\partial f/\partial x_i$ in naj bodo zvezne funkcije. Če integral*

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)dt$$

konvergira lokalno enakomerno na $\mathcal{G}$ za vsak i, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, potem je

$$F(x) = \int_a^\infty f(t,x)dt$$

na $\mathcal{G}$ parcialno odvedljiva na vse x_i in je

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)dt$$

za vsak i, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Vsi ti odvodi so zvezni na $\mathcal{G}$, t.j. $F \in \mathcal{G}^1$.

Analogni izreki veljajo tudi za posplošene integrale s parametrom na končnem intervalu, kjer je funkcija singularna v krajišču

$$\int_a^b f(x,t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b f(x,t)dt.$$

2.1.1 Eulerjeva Γ-funkcija

Oglejmo si

$$F(n) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z integriranjem „po delih", pri čemer uporabimo

$$t^n = u, \quad nt^{n-1}dt = du$$

$$e^{-t}dt = dv, \quad -e^{-t} = v,$$

dobimo

$$\begin{aligned} F(n) &= \lim_{A\to\infty}\left(\left[-t^n e^{-t}\right]_0^A + \int_0^A nt^{n-1}e^{-t}dt\right) \\ &= \lim_{A\to\infty}\left(-A^n e^{-A} + \int_0^A nt^{n-1}e^{-t}dt\right) \\ &= \int_0^\infty nt^{n-1}e^{-t}dt \\ &= nF(n-1). \end{aligned}$$

Torej $F(n) = nF(n-1)$, oz.

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^\infty e^{-t}dt = 1, \\ F(1) &= \int_0^\infty te^{-t}dt = 1, \\ &\dots \\ F(n) &= \int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!, \end{aligned}$$

Definirajmo

$$F(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

To je posplošen (izlimitiran) integral, ki konvergira pri ∞ za vsak x, pri 0 pa za $x > -1$. Tako dobimo dobro definirano funkcijo

$$F : (-1, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Od prej vemo, da je

$$F(x) = xF(x-1), \quad \forall x > 0$$

oziroma

$$F(x+1) = (x+1)F(x), \quad \forall x > -1.$$

Definicija 23 *Funkcija* Γ,

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = F(x-1),$$

je definirana za $x > 0$. *Imenujemo jo tudi* ***Eulerjeva*** Γ***-funkcija***.

Trditev 5

(i) $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty$ *in*

$$\begin{aligned}\Gamma^{(k)}(x) &= \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(t^{x-1}e^{-t}\right) dt \\ &= \int_0^\infty t^{x-1} \log^k t \cdot e^{-t} dt\end{aligned}$$

(ii) $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \infty$

(iii) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, *za vsak* $x > 0$.

Dokaz: (i) Najprej dokažimo zveznost funkcije Γ. Dokažemo, da $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ lokalno enakomerno konvergira na $(0, \infty)$.

Oglejmo si najprej $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$. Vzemimo $a > 0$ in $x \geq a$. Sledi

$$|t^{x-1}e^{-t}| \leq t^{a-1}e^{-t}.$$

Ker je $a-1 > -1$, je funkcija, s formulo $t^{a-1}e^{-t}$, integrabilna na intervalu $[0, 1]$. Torej $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ enakomerno konvergira na intervalu $[a, \infty)$ za vsak $a > 0$.

Oglejmo si še $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. Naj bo $b > 0$, $b > \infty$ in $x \leq b$. Torej

$$|t^{x-1}e^{-t}| \leq t^{b-1}e^{-t}.$$

Ker je funkcija, s formulo $t^{b-1}e^{-t}$ integrabilna na intervalu $[1, \infty)$, $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ enakomerno konvergira na $(0, b]$.

Formula za odvod velja, če

$$\int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(t^{x-1}e^{-t}\right) dt$$

lokalno enakomerno konvergira. Spet razdelimo na dva dela.

Prvi del:

$$\int_0^1 t^{x-1} \log^k t \cdot e^{-t} dt$$

Kot prej, izberemo $a > 0$ in $x \geq a$. Dobimo

$$|t^{x-1} \log^k t \cdot e^{-t}| \leq t^{a-1} \log^k t \cdot e^{-t}.$$

Za $\varepsilon > 0$ in $t^{a-1} \log^k t \cdot e^{-t} = t^{a-\varepsilon-1} t^{\varepsilon} \log^k t \cdot e^{-t}$, sledi $\lim_{t\to 0^+} t^k \log^k t = 0$. Ker je $a - 1 > -1$, obstaja $\varepsilon > 0$ tako, da $a - \varepsilon - 1 > -1$. Sledi, da je funkcija s formulo $t^{a-1} \log^k t \cdot e^{-t}$ integrabilna na $[0, 1]$.

Drugi del:

$$\int_1^{\infty} t^{x-1} \log^k t \cdot e^{-t} dt$$

Izberemo $b > 0$ in $x \leq b$. Dobimo

$$|t^{x-1} \log^k t \cdot e^{-t}| \leq t^{b-1} \log^k t \cdot e^{-t}.$$

Funkcija s formulo $t^{b-1} \log^k t \cdot e^{-t}$ je (podobno kot prej) integrabilna na $[1, \infty)$.

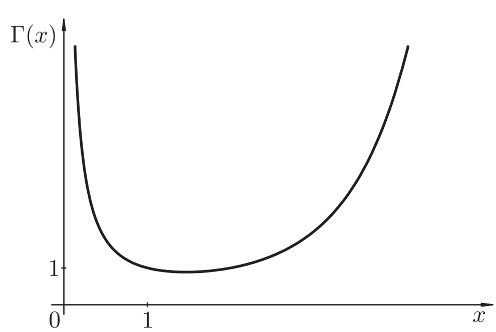
(ii) $\Gamma(x) = F(x-1)$, za $x > 0$. Vemo, da je $F(x) = xF(x-1)$. Sledi $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(iii) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, za $x > 0$. Sledi $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$, za $x > 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \infty,$$

Γ zvezna, $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(1) = 1$ in $\lim_{x\to 0^+} x = 0$. $\square$

Opomba: Jasno je $\lim_{x\to\infty} \Gamma(x) = \infty$. Od tod sledi graf funkcije Γ, slika 2.1.



Slika 2.1: Graf Eulerjeve funkcije Γ

Opomba: S pomočjo točke (iii) prejšnje trditve, lahko Γ razširimo na $(-1,0)\cup(-2,-1)\cup\ldots=(-\infty,0)\setminus\mathbb{Z}$. Torej

- za $-1<x<0$ sledi $x+1\in(0,1)$ oz.

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

- za $-2<x<-1$ sledi $x+2\in(0,1)$ oz.

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}$$

- ...

2.1.2 Eulerjeva B-funkcija

Definicija 24 *Funkcija B,*

$$B(x,y):=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

je definirana za $x,y>0$. Imenujemo jo tudi Eulerjeva B-funkcija.

Trditev 6 *Velja naslednja enakost:*

$$B(x,y)=\int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}ds.$$

Dokaz: Iz $s=t/(1-t)$, pri čemer velja $s\to 0\sim t\to 0$ in $s\to\infty\sim t\to 1$ izrazimo $t=s/(1+s)$, $1-t=1/(1+s)$, $dt=ds/(1+s)^2$, vstavimo v enačbo in dobimo

$$\begin{aligned}B(x,y)&=\int_0^\infty\left(\frac{s}{1+s}\right)^{x+1}\left(\frac{1}{1+s}\right)^{y-1}\frac{1}{(1+s)^2}ds\\&=\int_0^\infty\frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}ds.\end{aligned}$$

□

Izrek 26 *Za $x,y>0$ velja*

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} B(x+y)\Gamma(x+y) &= \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds \cdot \int_0^\infty t^{x+y-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \left(\frac{t}{1+s} \right)^{x+y-1} \frac{e^{-t} s^{x-1}}{1+s} dt \right] ds \stackrel{(*)}{=} \end{aligned}$$

$$\frac{t}{1+s} = u, \quad t = u(1+s), \quad \frac{dt}{1+s} = du$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(*)}{=} \int_0^\infty ds \int_0^\infty u^{x+y-1} e^{-u(1+s)} s^{x-1} dt \\ &= \int_0^\infty du \int_0^\infty u^{x+y-1} e^{-u(1+s)} s^{x-1} dt \\ &= \int_0^\infty u^{y-1} e^{-u} du \int_0^\infty (us)^{x-1} e^{-us} u ds \stackrel{(**)}{=} \end{aligned}$$

$$us = v, \quad uds = dv$$

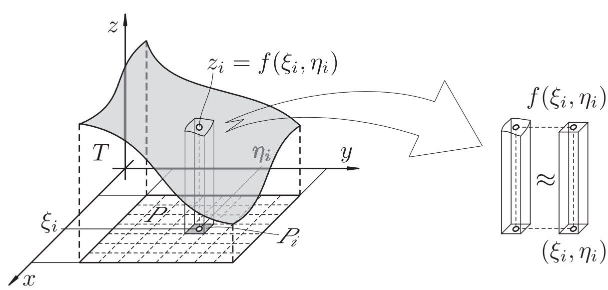
$$\begin{aligned} &\stackrel{(**)}{=} \int_0^\infty u^{y-1} e^{-u} du \int_0^\infty v^{x-1} e^{-v} dv \\ &= \Gamma(x) \cdot \Gamma(y) \end{aligned}$$

$\square$

Poglavje 3

Riemannov integral v $\mathbb{R}^n$

Poglejmo si najprej primer $n = 2$.



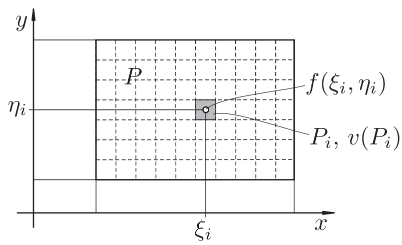
Slika 3.1: Motivacija za dvojni integral

Naj bo P pravokotnik v ravnini x-y, funkcija $f : P \to \mathbb{R}$ pozitivna in omejena in naj bo $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in P, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. Želimo izračunati prostornino območja T.

Pravokotnik P razdelimo na drobne pravokotnike $P_1, P_2, \ldots, P_n$, s ploščinami $v(P_1), v(P_2, \ldots, v(P_n)$. V vsakem P_i izberemo točko $(\xi_i, \eta_i) \in P_i$ in nato izračunamo vsoto

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i, \eta_i) v(P_i)}_{*},$$

kjer $*$ predstavlja *približno* prostornino i-tega stolpca.



Slika 3.2: Delitev pravokotnika P na manjše pravokotnike

Vsoto zgoraj imenujemo Riemannova vsota. Celotna vsota je približek za iskano prostornino. Do boljšega približka pridemo s finejšo razdelitvijo. V limiti bomo dobili točno prostornino. Za splošne omejene funkcije f na P bomo rekli takole: če obstaja število I, da velja: za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja δ tako, da za vsako delitev $P_1, P_2, \ldots, P_n$, kjer so vse stranice pravokotnikov krajše od δ in za vsako izbiro točk $(\xi_i, \eta_i) \in P_i$ velja

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) v(P_i) - I \right| < \varepsilon.$$

Tedaj bomo rekli, da je f integrabilna na P in I je njen integral po P. Tako bomo definirali dvojni Riemannov integral.

Podobno vpeljemo trojni integral. Naj bo P kvader v prostoru $\mathbb{R}^3$. Naj bo dana gostota $\rho(x, y, z)$ snovi v kvadru. ρ naj bo pozitivna zvezna funkcija. Radi bi izračunali maso kvadra. Maso znamo izračunati, če je material iz katerega je kvader narejen homogen, t.j. $\rho = konst.$. Tedaj je $masa = konst. \cdot prostornina\ kvadra$. Približek: razdelimo P na majhne kvadrčke $P_1, P_2, \ldots, P_n$ s prostorninami $v(P_1), v(P_2, \ldots, v(P_n)$. Izberimo v vsakem kvadrčku P_i neko točko (ξ_i, η_i, ζ_i). Približek za maso kvadra je

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v(P_i)}_{*},$$

kjer $*$ predstavlja približno prostornino i-tega kvadrčka. Zgornjo vsoto imenujemo Riemannova vsota. Celotna vsota je približek za iskano maso. V limiti, ko gre dolžina najdaljše stranice proti 0, dobimo točno maso našega kvadra. To limito bomo imenovali trojni (Riemannov) integral funkcije ρ v P.

Definicija 25 (Kvadri v $\mathbb{R}^n$) *Naj bo $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \ldots, a_n < b_n$. Kartezični produkt*

$$\begin{aligned} P &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \\ &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : a_i \leq x \leq b_i\}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

imenujemo zaprt kvader v $\mathbb{R}^n$ in

$$\begin{aligned} Q &= (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n) \\ &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : a_i < x < b_i\}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

imenujemo odprt kvader v $\mathbb{R}^n$.

Definicija 26 *Volumen kvadra $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ je enak produktu dolžin stranic $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$.*

Diskusija: Če vsako stranico kvadra $[a_i, b_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, razdelimo takole:

$$a_i = x_0^i < x_1^i < \ldots < x_{m_i}^i < b_i, \quad m_i \in \mathbb{N},$$

razdelimo ves kvader na $m_1, \ldots, m_n$ kvadrčkov oblike:

$$[x_{j_i - 1}^1] \times \ldots \times [x_{j_n - 1}^n],$$

kjer $0 \leq j_i \leq m_i$. Delitev kvadra je torej množica vseh kvadrčkov.

Oznaka: Naj bo f omejena funkcija na kvadru P. Pišimo

$$\begin{aligned} m(f, P) &= \inf\{f(x) : x \in P\} \\ M(f, P) &= \sup\{f(x) : x \in P\}. \end{aligned}$$

Kot pri funkcijah ene spremenljivke bomo tudi tukaj razvili kot pomožno sredstvo t.i. Darbouxov integral.

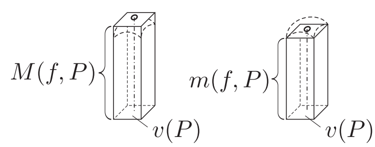
Definicija 27 *Naj bo f omejena funkcija na kvadru P in $\mathcal{D}$ delitev kvadra P na kvadrčke (kot zgoraj), torej $\mathcal{D} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$. Vsoto*

$$s(f, \mathcal{D}) = \sum_{P \in \mathcal{D}} m(f, P) v(P)$$

imenujemo ***spodnja Darbouxova vsota****, vsoto*

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{P \in \mathcal{D}} M(f, P) v(P)$$

pa imenujemo ***zgornja Darbouxova vsota****, prirejena delitvi $\mathcal{D}$ in funkciji f.*



Slika 3.3: Stolpiča zgornje in spodnje Darbouxove vsote

Definicija 28 *Naj bosta $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$ delitivi kvadra P. Delitev $\mathcal{D}'$ je finejša kot delitev $\mathcal{D}$, če je vsak kvader, ki pripada delitvi $\mathcal{D}'$ vsebovan v nekem kvadru delitve $\mathcal{D}$.*

Opomba: Če je $P' \subset P$, je

$$\sup\{f(x) : x \in P\} \leq \sup\{f(x) : x \in P\}$$

$$\inf\{f(x) : x \in P\} \geq \inf\{f(x) : x \in P\}.$$

Posledica 8 *Če je delitev $\mathcal{D}'$ finejša od delitve $\mathcal{D}$ in je f omejena funkcija na P, je $s(f, \mathcal{D}) \leq s(f, \mathcal{D}')$ in $S(f, \mathcal{D}) \geq S(f, \mathcal{D}')$.*

Posledica 9 *Za poljubni delitvi $\mathcal{D}'$ in $\mathcal{D}''$ kvadra P, je $s(f, \mathcal{D}'') \leq S(f, \mathcal{D}')$, t.j. vsaka spodnja vsota je manjša ali kvečjemu enaka vsaki zgornji vsoti.*

Dokaz: Naj bosta $\mathcal{D}'$ in $\mathcal{D}''$ delitvi kvadra P. Naj bo $\mathcal{D}$ nova delitev, kjer za vsak $[a_i, b_i]$ vzamemo vse delilne točke obeh delitev. Dobimo delitev, ki je finejša od obeh. Zato je

$$s(f, \mathcal{D}'') \leq s(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D}').$$

□

Opomba: Če je f omejena na kvadru P, so spodnje vsote navzgor omejene in zgornje vsote navzdol omejene, torej obstajata $s = \sup\{s(f, \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ delitev } P\}$ in $S = \inf\{S(f, \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ delitev } P\}$.

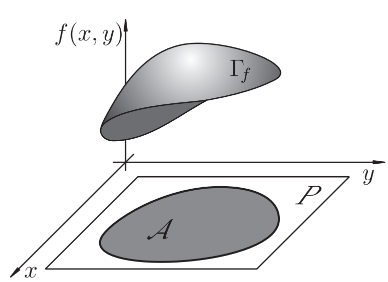
Definicija 29 *Omejena funkcija f na kvadru P je integrabilna po Darbouxu, če je $s = S$. To število $s = S = I$ se imenuje **Darbouxov integral** funkcije f. Pišemo*

$$\begin{aligned} I &= \int_P f \\ &= \int_P f(x)dx \\ &= \overbrace{\int\int \dots \int}^{n}_{P} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_3. \end{aligned}$$

Opomba: Kasneje bomo videli, da je f integrabilna po Darbouxu natanko tedaj, ko je integrabilna po Rieamannu in oba integrala sovpadata.

Kaj bi pomenilo, da je f integrabilna na množici $\mathcal{A}$? Naj bo sedaj f definirana in omejena na neki neprazni omejeni množici $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Množica $\mathcal{A}$ je omejena, torej vsebovana v nekem kvadru P. Razširimo funkcijo f z $\mathcal{A}$ na ves P do funkcije $\tilde{f}$ na kvadru P takole:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathcal{A} \\ 0, & x \in P \setminus \mathcal{A}. \end{cases}$$



Slika 3.4: Razširitev funkcije f na ves P

Definicija 30 *Omejena funkcija f na množici $\mathcal{A}$ je integrabilna, če je $\tilde{f}$ inte-*

grabilna na P in integral

$$\int_{\mathcal{A}} f := \int_P \tilde{f}.$$

Opomba: Preprosto se vidi, da integral ni odvisen od kvadra P, ampak le od f in $\mathcal{A}$.

Podobno, kot pri funkcijah ene spremenljivke dokažemo, da je integrabilnost po Riemannu isto kot integrabilnost po Darbouxu in da sta oba integrala enaka:

Izrek 27 *Naj bo f omejena funkcija na kvadru $P \in \mathbb{R}^n$. Tedaj so ekvivalentne naslednje trditve:*

(i) Funkcija f je integrabilna v smislu definicije zgoraj (po Darbouxu) in njen integral je enak I, t.j. $S = s =: I$.

(ii) Obstaja število I, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsako delitev P na kvadru $P_1, P_2, \ldots, P_N$, z robovi krajšimi od δ in za poljubne $x_1 \in P_1, x_2 \in P_2, \ldots, x_N \in P_N$ velja

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i) v(P_i) - I \right| < \varepsilon,$$

t.j. f je integrabilna po Riemannu in I je njen integral.

(iii) Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja delitev $\mathcal{D}_\varepsilon$ kvadra P, da je

$$S(f, \mathcal{D}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{D}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Opomba: Vsoto $\sum_{i=1}^{N} f(x_i) v(P_i)$ imenujemo Riemannova vsota za delitev $\mathcal{D}$ in izbiro točk x_i.

Opomba: (b) pomeni integrabilnost po Riemannu. Po tem izreku bi jo lahko vzeli za definicijo integrabilnosti.

Dokaz: $(a) \Rightarrow (c)$ Naj velja (a). Tedaj je $I = s = S = \int f(x)dx$. Ker je $I = S = \inf\{S(f, \mathcal{D}), \mathcal{D} \text{ delitev}\}$, lahko za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo delitev $\mathcal{D}'_\varepsilon$, da je $S(f, \mathcal{D}'_\varepsilon) < I + \varepsilon/2$. Enako obstaja delitev $\mathcal{D}''_\varepsilon$, da je $s(f, \mathcal{D}''_\varepsilon) > I - \varepsilon/2$. Naj bo

$\mathcal{D}_\varepsilon$ taka delitev, da upoštevamo na vsakem intervalu $[a_i, b_i]$ delilne točke obeh delitev $\mathcal{D}'_\varepsilon$ in $\mathcal{D}''_\varepsilon$. Tedaj je $\mathcal{D}_\varepsilon$ finejša od $\mathcal{D}'_\varepsilon$ in $\mathcal{D}''_\varepsilon$, torej

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \mathcal{D}'_\varepsilon) \leq s(f, \mathcal{D}_\varepsilon) \leq S(f, \mathcal{D}_\varepsilon) \leq S(f, \mathcal{D}''_\varepsilon) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Od tod sledi $S(f, \mathcal{D}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{D}_\varepsilon) < \varepsilon$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Pokažemo, da je I, ki nastopa v (b) enak S in enak s. Od tod bo sledilo $S = s$, torej (a).

Naj velja (b) in naj bo I kot v (b). Naj bo $\varepsilon > 0$. Po točki (b) obstaja $\delta > 0$, da za poljubno delitev kvadra P na kvadre $P_1, P_2, \ldots, P_N$ s stranicami krajšimi od δ in za poljubne $x_i \in P_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, velja

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i) v(P_i) - I \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Po definiciji suprema lahko za vsak i izberemo $x_i \in P_i$, da je

$$(*) \qquad \left| f(x_i) - \sup_{x \in P_i} f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2N v(P_i)}.$$

Sledi

$$\begin{aligned}
(**) \qquad \left| S(f, \mathcal{D}) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i) v(P_i) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{N} \sup_{x \in P_i} f(x) \cdot v(P_i) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i) v(P_i) \right| \\
&\leq \left| \sum_{i=1}^{N} \sup_{x \in P_i} f(x) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \right| \cdot v(P_i) \\
&< \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2N v(P_i)} \cdot v(P_i) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Iz $(*)$ in $(**)$ sledi

$$\begin{aligned}
|S(f, \mathcal{D}) - I| &\leq \left| S(f, \mathcal{D}) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i) v(P_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i) v(P_i) - I \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Podobno pokažemo še za spodnje vsote. Dobimo $|I - s(f, \mathcal{D})| < \varepsilon$. Torej

$$\begin{aligned} S - s &\leq S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) \\ &\leq |S(f, \mathcal{D}) - I| + |I - s(f, \mathcal{D})| \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

Ker je bil $\varepsilon > 0$ poljuben, je $S - s = 0$ oz. $S = s$. Torej velja (a).

$(c) \Rightarrow (a)$ Naj velja (c). Tedaj za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\mathcal{D}_\varepsilon$, da je

$$0 \leq S(f, \mathcal{D}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{D}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Ker za vsako delitev vedno velja

$$s(f, \mathcal{D}) \leq s \leq S \leq S(f, \mathcal{D}),$$

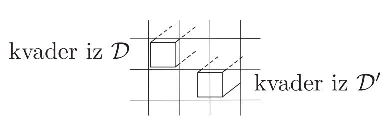
sledi, da za vsak $\varepsilon > 0$ velja

$$0 \leq S - s < \varepsilon,$$

torej je res $S = s$. $\square$

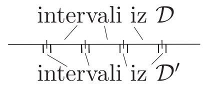
Ostane nam še dokaz $(a) \Rightarrow (b)$, t.j. intergrabilna po Darbouxu $\Rightarrow$ integrabilna po Riemannu. Še prej pa si oglejmo naslednjo trditev.

Trditev 7 *Naj bo $\mathcal{D}$ delitev kvadra $P \subset \mathbb{R}^n$. Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da velja naslednje: Za vsako delitev $\mathcal{D}'$, s stranicami krajšimi od δ, je skupna prostornina kvadrov delitve $\mathcal{D}'$, ki niso v celoti v kakšnem od kvadrov iz delitve $\mathcal{D}$, manjša od ε.*



Slika 3.5: Kvadri iz delitve $\mathcal{D}'$, ki niso v celoti v $\mathcal{D}$

Dokaz: Najprej za $n = 1$. Naj ima delitev $\mathcal{D}$ M točk in naj bo $\delta = \varepsilon/M$.

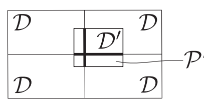


Slika 3.6: Intervali iz delitve $\mathcal{D}'$, ki niso v celoti v $\mathcal{D}$

Skupna dolžina intervalčkov deliteve $\mathcal{D}'$, ki niso v kakšnem od intervalov delitve $\mathcal{D}$ (teh je največ M), je torej manjša ali kvečjemu enaka $M\varepsilon/M = \varepsilon$.

Za $n > 1$. Skupno prostornino $n-1$-razsežnih mej, med kvadri delitve $\mathcal{D}$, označimo s T.

Naj bo $\delta = \varepsilon/T$. Oglejmo si kolikšna je skupna prostornina vseh kvadrov delitve $\mathcal{D}'$, ki niso v celoti v kakšnem od kvadrov iz delitve $\mathcal{D}$. Za delitev $\mathcal{D}'$ se vsak kvader delitve $\mathcal{D}'$, ki ni v celoti v kakšnem od kvadru delitve $\mathcal{D}$, seka vsaj z dvema sosednjima kvadroma delitve $\mathcal{D}$.



Slika 3.7: Kvader iz delitve $\mathcal{D}'$

Pri tem preseka del skupne meje med kvadri delitve $\mathcal{D}$. Tega dela noben drug kvader iz $\mathcal{D}'$ ne preseka. Njegova prostornina je manjša ali kvečjemu enaka produktu prostornine preseka in δ, saj je dolžina stranic navzgor omejena z δ. Naj bo $A(P')$ $n-1$-razsežna prostornina preseka takega kvadra P' delitve $\mathcal{D}'$, s skupno mejo med kvadri delitve $\mathcal{D}$. Potem je $v(P') \le A(P')\cdot\delta$. Ko to seštejemo po vseh takih kvadrih P' delitve $\mathcal{D}'$, ki ne ležijo v celoti v kakšnem od kvadrov delitve $\mathcal{D}$, dobimo:

$$\sum_{*} v(P') \le \sum_{*} A(P')\cdot\delta \le \delta\sum_{*} A(P') \le \delta T = \delta\frac{\varepsilon}{\delta} = \varepsilon,$$

kjer $*$ pomeni take kvadre, ki ne ležijo v celoti v kakšnem od kvadrov delitve $\mathcal{D}$. $\square$

Dokaz (izreka): $(a) \Rightarrow (b)$ Naj velja (a), t.j. $S = s = I$. Naj bo $\varepsilon > 0$ Funkcija f je omejena, torej obstaja $M < \infty$, da je $|f(x)| < M$ za vsak $x \in P$. Ker velja

(a), obstajata delitvi $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$, da je $I - s(f, \mathcal{D}_1) < \varepsilon/2$ in $S(f, \mathcal{D}_2) - I < \varepsilon/2$. Obstaja tudi delitev $\mathcal{D}$, ki je finejša od delitev $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$. Lahko vzamemo kar vse skupne delilne točke stranic delitve $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$. Velja isto $I - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon/2$ in $S(f, \mathcal{D}) - I < \varepsilon/2$, saj se pri prehodu na finejšo delitev spodnja vsota kvečjemu poveča, zgornja pa kvečjemu zmanjša. Po zgornji trditvi obstaja $\delta > 0$, da je za vse delitve $\mathcal{D}'$, s stranicami krajšimi od δ, vsota prostornin tistih kvadrov, ki niso v celoti v kakšnem od kvadrov iz delitve $\mathcal{D}$, manjša od ε.

Naj bo $\mathcal{D}'$ taka delitev. Naj bodo $P_1, P_2, \ldots, P_N$ kvadri delitve $\mathcal{D}'$, oštevilčeni tako, da so $P_1, P_2, \ldots, P_k$ tisti, ki so v celoti v kakšnem od kvadrov delitve $\mathcal{D}$ in $P_{k+1}, P_{k+2}, \ldots, P_N$ pa ostali, t.j. tisti, ki niso v celoti v kakšnem od kvadrov delitve $\mathcal{D}$, t.j. tisti, ki sekajo skupno mejo kvadrov delitve $\mathcal{D}$. Če je P_i vsebovan v kvadru Q delitve $\mathcal{D}$ je $\sup_Q f \geq \sup_{P_i} f$. Naprej; vsota prostornin kvadrov P_i, ki so vsi vsebovani v kvadru Q je manjša ali kvečjemu enaka prostornini kvadra Q. Če so torej $P_{j_1}, P_{j_2}, \ldots, P_{j_l}$ vsi vsebovani v istem kvadru Q delitve $\mathcal{D}$, je torej vsota

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l} f(x_{j_k}) v(P_{j_k}) &\leq \sum_{k=1}^{l} \sup_{x \in Q} f(x) \cdot v(P_{j_k}) \\ &\leq \sup_{x \in Q} f(x) \cdot v(Q),\end{aligned}$$

kjer je $x_{j_k} \in P_{j_k}$. Zato je

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} f(x_i) v(P_i) &= \sum_{i=1}^{k} f(x_i) v(P_i) + \sum_{i=k+1}^{N} f(x_i) v(P_i) \\ &\leq S(f, \mathcal{D}) + M \frac{\varepsilon}{2M} \\ &\leq I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= I + \varepsilon\end{aligned}$$

Od tod torej sledi, da je vsaka Riemannova vsota pri delitvi $\mathcal{D}'$ manjša ali kvečjemu enaka $I + \varepsilon$.

Na podoben način pokažemo, da je vsaka Riemannova vsota pri delitvi $\mathcal{D}'$ večja ali kvečjemu enaka $I - \varepsilon$.

Dobili smo torej, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsako delitev $\mathcal{D}'$ kvadra P, s stranicami krajšimi od δ, in za vsako izbiro točk $x_i \in P_i$ velja, da je

$$I - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{N} f(x_i)v(P_i) \leq I + \varepsilon.$$

To pa je ravno točka (b). $\square$

V $\mathbb{R}^n$ bi radi integrirali po splošnejših množicah kot so kvadri. Definirajmo prostornino množice.

Definicija 31 *Naj bo $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Karakteristična funkcija $\chi_{\mathcal{A}}$ množice $\mathcal{A}$ je definirana na $\mathbb{R}^n$ takole:*

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1; & x \in \mathcal{A} \\ 0; & x \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

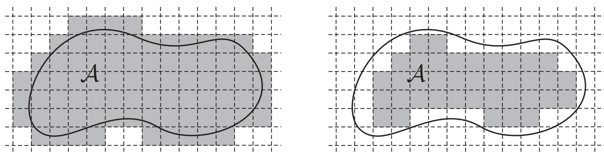
Definicija 32 *Omejena množica $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ ima prostornino, če je karakteristična funkcija $\chi_{\mathcal{A}}$ integrabilna. Prostornina množica $\mathcal{A}$ je definirana takole:*

$$\begin{aligned} v(\mathcal{A}) := &\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{A}} \\ &\left(= \int_P \chi_{\mathcal{A}}, \quad \forall P \supset \mathcal{A} \right) \\ &\left(= \int_{\mathcal{A}} \chi_{\mathcal{A}} \right) \end{aligned}$$

Če ima množica $\mathcal{A}$ prostornino, pravimo tudi, da je ta množica Jordanovo-merljiva množica.

Če je P odprt kvader, $P = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, je njegova prostornina enaka $(b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$, t.j. enaka prostornini njegovega zaprtja $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

Do pojma Jordanovo-merljive nmožice pridemo tudi takole: Prostor $\mathbb{R}^n$ razdelimo za vsak $m \in \mathbb{N}$ na kocke K_i^m, s stranicami dolžine $1/m$. Prostornina take kocke je $1/m^n$. Definirajmo zunanjo in notranjo prostornino množice $\mathcal{A}$.



Slika 3.8: Zunanja in notranja prostornina množice $\mathcal{A}$

Množico $\mathcal{A}$ aproksimiramo s kockicami „od zunaj"

$$V^+(\mathcal{A}) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sum_{*} v(K_i^m),$$

kjer $* = i : K_i^m \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ in „od znotraj"

$$V^-(\mathcal{A}) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{**} v(K_i^m),$$

kjer $** = i : K_i^m \subset \mathcal{A}$.

Vsaka omejena množica $\mathcal{A}$ ima notranji in zunanji volumen. Če je $V^+(\mathcal{A}) = V^-(\mathcal{A})$ pravimo, da ima množica $\mathcal{A}$ volumen, t.j. $V = V^+(\mathcal{A}) = V^-(\mathcal{A})$. To je ekvivalentno definiciji volumna zgoraj (Spomnimo se samo na Darbouxove vsote).

Definicija 33

(a) (Omejena) množica $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ ima volumen 0, če je $v(\mathcal{A}) = 0$.

(b) (Ne nujno omejena) množica $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ ima mero 0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja pokritje množice $\mathcal{A}$ s kvadri $P_1, P_2, \ldots$, katerih vsota volumnov je manjša od ε, t.j. ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $P_1, P_2, \ldots$, da je

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \quad \textit{in} \quad \sum_{i=1}^{\infty} v(P_i) < \varepsilon.$$

Zgled: Naj bo $\mathcal{S}$ števna množica. Tedaj ima $\mathcal{S}$ mero 0. Zakaj?

Naj bo $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ in naj bo $\varepsilon > 0$. Izberimo kvadre P_i tako, da

$$
\begin{aligned}
&a_1 \in P_1 \text{ in } v(P_1) < \frac{\varepsilon}{2},\\
&a_2 \in P_2 \text{ in } v(P_2) < \frac{\varepsilon}{4},\\
&\quad\ldots\\
&a_n \in P_n \text{ in } v(P_n) < \frac{\varepsilon}{2^n},\\
&\quad\ldots
\end{aligned}
$$

Tedaj je množica $\mathcal{S} \subset \cup_{j=1}^{\infty} P_j$ in $v(P_1) + v(P_2) + \ldots < \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \ldots = \varepsilon$. Torej, če je npr. $\mathcal{S}$ števna podmnožica kvadra P, ki je v P povsod gosta, t.j. za vsak $a \in P$ in vsako okolico $\mathcal{U}(a)$ točke a obstaja $s \in \mathcal{S}$, $s \in \mathcal{U}(a)$, ima $\mathcal{S}$ mero 0. $\diamondsuit$

Premislek: Taka množica $\mathcal{S}$ nima volumna. Njena karakteristična funkcija $\chi(x)$ namreč ni integrabilna, saj so zgornje Darbouxove vsote ves čas enake $1 \cdot v(P)$, spodnje Darbouxove vsote pa $0 \cdot v(P)$, torej $s = 0$, $S = v(P)$, torej $s \neq S$.

Premislek: (Omejena) množica $\mathcal{A}$ ima volumen 0 natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja *končno* pokritje množice $\mathcal{A}$ s kvadri, katerih skupni volumen ne presega ε, t.j. ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstajajo kvadri $P_1, P_2, \ldots$, da je $\mathcal{A} \subset \cup_{j=1}^{N} P_j$ in $\sum_{i=1}^{N} v(P_i) < \varepsilon$. Imeti volumen 0, $v(\mathcal{A}) = 0$ pomeni, da je karakteristična funkcija množice $\mathcal{A}$, t.j. $\chi(\mathcal{A})$ integrabilna in je njen integral enak 0.

$\mathcal{A}$ vložimo v kvader P in si ogledamo $\chi_{\mathcal{A}}$ na P. Izraz $\int_P \chi_{\mathcal{A}} = 0$ pomeni, $S = s = 0$. Jasno je $s \geq 0$, saj je $\chi_{\mathcal{A}} \geq 0$.

$$
S(\chi_{\mathcal{A}}, \mathcal{D}) = \sum_{P_i \in \mathcal{D}} \sup_{x \in P_i} \chi_{\mathcal{A}}(x) \cdot v(P_i)
$$

$$
\sup_{x \in P_i} \chi_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1; & P_i \cap \mathcal{A} \neq \emptyset \\ 0; & P_i \cap \mathcal{A} = \emptyset \end{cases}
$$

$$
S(\chi_{\mathcal{A}}, \mathcal{D}) = \sum_{i : P_i \cap \mathcal{A} \neq \emptyset} v(P_i)
$$

Izraz $\inf_{\mathcal{D}} S(\chi_{\mathcal{A}}, \mathcal{D}) = S = 0$ pa pomeni, da lhako za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo delitev, pri kateri $S(\chi_{\mathcal{A}}, \mathcal{D}) < \varepsilon$, t.j. da lahko najdemo delitev $\mathcal{D}$, da je $\sum_{P_i \in \mathcal{D}, P_i \cap \mathcal{A} \neq \emptyset} v(P_i) < \varepsilon$.

Volumen smo definirali (za množice, ki imajo volumen), mere nismo definirali. Definirali smo samo „imeti mero 0”.

Trditev 8 *Števna unija množic z mero* 0 *ima mero* 0.

Dokaz: Naj bodo $\mathcal{A}_j$, $j \in \mathbb{N}$, množice z mreo 0. Naj bo $\varepsilon > 0$. Za vsak j lahk opokrijemo $\mathcal{A}_j$ s kvadri $P_{j_1}, P_{j_2}, \ldots$ katerih skupna prostornina je manjša od $\varepsilon/2$, t.j. $\sum_{k=1}^{\infty} v(P_{j_k}) < \varepsilon/2^j$. Unijo torej lahko prekrijemo s kvadri P_{j_k}, $j, k \in \mathbb{N}$. Skupna prostornina teh kvadrov ne presega $\varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \ldots = \varepsilon$. $\square$

Trditev 9 *V definiciji množice z mero* 0 *lahk ouporabljamo zaprte ali odprte kvadre.*

Dokaz: Vsak odprt kvader P_i je podmnožica svojega zaprtja, t.j. zaprtega kvadra z istimi robovi $\overline{P_i}$. Vsak zaprt kvader lahko vložimo v odprt kvader z npr. dvakrat daljšimi robovi Q_i. Tedaj je $v(Q_i) = 2^n \cdot v(P_i)$, kjer je n-razsežnost prostora $\mathbb{R}^n$.

Če je za vsak $\varepsilon > 0$ možno pokriti $\mathcal{A}$ z odprtimi kvadri P_i z $\sum_{i=1}^{\infty} v(P_i) < \varepsilon$, tedaj je $\sum_{i=1}^{\infty} v(\overline{P_i}) < \varepsilon$, torej je $\mathcal{A}$ pokrit z zaporedjem $\overline{P_i}$ zaprtih kvadrov s skupnim volumnom manjšim od ε. Če je za vsak $\delta > 0$ mogoče $\mathcal{A}$ pokriti z zaprtimi kvadri P_i s skupnim volumnom manjšim od δ, t.j. $\sum v(P_i) < \delta$, je (vzemimo $Q_i \supset P_i$ dvakrat večji odprt kvader) mnogoče $\mathcal{A}$ pokriti z odprtimi kvadri Q_i s skupnim volumnom

$$\sum_{i=1}^{\infty} v(Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^n \cdot v(P_i) < 2^n \delta.$$

Torej za vsak $\varepsilon > 0$ izberemo $\delta > 0$ tako, da je $2^n \delta = \varepsilon$, mogoče pokriti $\mathcal{A}$ z odprimi kvadri s skupnim volumnom manjšim od ε. $\square$

Opomba: Če ima množica $\mathcal{A}$ volumen 0, ima mero 0, t.j. če je $v(\mathcal{A}) = 0$, je za vsak $\varepsilon > 0$ $\mathcal{A} \subset \cup_{i=1}^{N} P_i$, $\sum_{i=1}^{N} v(P_i) < \varepsilon$. Torej ima $\mathcal{A}$ mero 0.

Obrat velja za kompaktne množice, t.j. če je $\mathcal{A}$ kompaktna z mero 0, ima $\mathcal{A}$ volumen 0. Naj bo $\mathcal{A}$ kompaktna z mero 0. Tedaj za vsak $\varepsilon > 0$ obstajajo odprti kvadri $P_1, P_2, \ldots$, $\mathcal{A} \subset \cup_{i=1}^{\infty} P_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} v(P_i) < \varepsilon$. Tedaj je $P_1, P_2, \ldots$ odprto pokritje množice $\mathcal{A}$. Zaradi kompaktnosti onstaja končno podpokritje, torej obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $\mathcal{A} \subset P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_N$. Jasno je $\sum_{i=1}^{N} v(P_i) < \sum_{i=1}^{\infty} v(P_i) < \varepsilon$. To pa vemo, da pomeni, da ima $\mathcal{A}$ volumen 0, $v(\mathcal{A}) = 0$.

Zgledi:

(i) Premica $\mathbb{R}$ ima v $\mathbb{R}^2$ mero 0. Za vsak $\varepsilon > 0$ iščemo zaporedje P_n pravokotnikov s takšno skupno ploščino, da je $\mathbb{R} \subset \cup_{j=1}^{\infty} P_j$. Rešitev: Naj bo $\varepsilon > 0$, dolžina vsakega pravokotnika 1 in višina pravokotnika P_1 $\varepsilon/2$. Torej je volumen $v(P_1) = 1 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon/2$. Naj bo višina pravokotnika P_2 $\varepsilon/4$, $v(P_2) = 1 \cdot \varepsilon/4 = \varepsilon/4$, ...Vsota volumnov vseh pravokotnikov je $\sum_i v(P_1) = \varepsilon$, $\cup P_i \supset \mathbb{R}$.

(ii) Daljica v $\mathbb{R}^2$ ima volumen (t.j. ploščino) 0.

(iii) Rob kvadra P ima volumen 0. $\diamondsuit$

V analizi I smo pokazali, da so zvezne funkcije na zaprtem intervalu integrabilne. Uporabili smo enakomerno zveznost take funkcije. Enako dokažemo; če je f zvezna funkcija na zaprtem kvadru, je f integrabilna. Dokazali smo tudi, če ima omejena funkcija končno mnogo točk nezveznosti na zaprtem intervalu, je taka funkcija tudi še integrabilna. Kako daleč od zvezne funkcije je lahko dana funkcija na zaprtem kvadru P, da bo še vedno integrabilna? Vemo, da če je preveč nezvezna, npr. karakterističan funkcija $\chi_{\mathcal{A}}$ števne množice $\mathcal{A} \subset P$, ki je v P povsod gosta, potem taka funkcija ni integrabilna.

Brez dokaza navedimo naslednji izrek.

Izrek 28 (Lebesgue) *Naj bo P kvader in naj bo f omejena funkcija na P. Tedaj je f integrabilna na P natanko tedaj, ko ima množica točk nezveznosti funkcije f mero* 0.

Opomba: Točka nezveznosti je točka, v kateri funkcija ni zvezna.

Posledica 10 *Omejena množica $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ ima volumen natanko tedaj, ko ima njen rob volumen* 0.

Dokaz: Rob množice $\mathcal{A}$ je kompakten, t.j. zaprt in omejen. Vložimo $\mathcal{A}$ v kvader P in si oglejmo na tem kvadru karakteristično funkcijo množice $\mathcal{A}$, t.j.

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1; & x \in \mathcal{A} \\ 0; & x \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Točke nezveznosti funkcije $\chi_{\mathcal{A}}$ so natanko točke roba $\partial\mathcal{A}$. Če točka a ni v robu, t.j. $a \in P \setminus \partial\mathcal{A}$, je a ali v notranjosti $\mathcal{A}$ ali v zunanjosti $\mathcal{A}$. V prvem primeru obstaja še neka okolica $\mathcal{U}(a)$, ki je vsa $\mathcal{A}$. Torej je vrednost funkcije v celotni okolici točke a identično enaka 1, torej zvezna. V drugem primeru obstaja še neka okolica $\mathcal{W}(a)$, ki je vsa v $P \setminus \mathcal{A}$. Torej je vrednost karakteristične funkcije v $\mathcal{W}(a)$ povsod enaka 0 in je $\chi_{\mathcal{A}}$ v a zvezna. Če je $a \in \partial\mathcal{A}$, je lahko $a \in \mathcal{A}$, tedaj je $\chi_{\mathcal{A}}(a) = 1$, ali pa $a \notin \mathcal{A}$, tedaj je $\chi_{\mathcal{A}}(a) = 0$. V poljubni majhni okolici $\mathcal{U}(a)$ so točke iz $\mathcal{A}$ in točke, ki niso v $\mathcal{A}$. Z drugimi besedami; v poljubno majhni okolici točke a, funkcija $\chi_{\mathcal{A}}$ zavzame vrednosti 0 in 1, zato v a ne more biti zvezna.

Po Lebesguevem izreku ima $\mathcal{A}$ volumen, t.j. $\chi_{\mathcal{A}}$ je integrabilna na P natanko tedaj, ko ima $\partial\mathcal{A}$ mero 0, kar pa je zaradi kompaktnosti $\partial\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko ima $\partial\mathcal{A}$ volumen 0. $\square$

Ne pozabi: Množica $\mathcal{S}$ ima volumen 0 natanko tedaj, ko jo je mogoče za vsak $\varepsilon > 0$ pokriti s končno kvadri s skupno prostornino manjšo od ε.

Posledica 11 *Naj bo $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ omejena množica, ki ima volumen. Omejena funkcija $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, ki ima končno ali števno neskončno točk nezveznosti, je integrabilna na $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Naj bo $\mathcal{A} \subset P$, P kvader. Definiramo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x); & x \in \mathcal{A} \\ 0; & x \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Vsaka točka nezveznosti funkcije f je točka nezveznosti funkcije $\tilde{f}$. Poleg tega ima $\tilde{f}$ lahko še točke nezveznosti na $\partial\mathcal{A}$. Torej so točke nezveznosti funkcije f vsebovane v

$$\mathcal{A} \cup \{\text{točke nezveznosti } f\},$$

$\partial\mathcal{A}$ ima volumen, torej ima mero 0, množica točk nezveznosti je števna, torej ima mero 0. Torej ima tudi unija mero 0. Zato je množica točk nezveznosti funkcije $\tilde{f}$ množica z mero 0. Po Lebesgueovem izreku je $\tilde{f}$ integrabilna na P, torej integrabilna na $\mathcal{A}$. □

Izrek 29 *Naj bo $\mathcal{A}$ omejena množica in $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija (torej omejena). Tedaj velja:*

(*a*) *mero* 0*, je* $\int_{\mathcal{A}} f(x)dx = 0$.

(*b*) *če je* $f(x) \geq 0$ *za vse* $x \in \mathcal{A}$ *in* $\int_{\mathcal{A}} f(x)dx = 0$ *ima množica* $\{x \in \mathcal{A} : f(x) \neq 0\}$ *mero* 0.

Dokaz: (*a*) Naj bo $\mathcal{A} \subset P$, P kvader. Na $P \setminus \mathcal{A}$ postavimo $f = 0$. Funkcija f je omejena, t.j. obstaja M, da je $|f(x)| \leq M$, $x \in P$. Naj bo $\mathcal{D}$ delitev kvadra P na $P_1, P_2, \ldots, P_N$.

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^{N} \inf_{x \in P_i} f(x) \cdot v(P_i) \\ &\leq M \sum_{i=1}^{N} \inf_{x \in P_i} \chi_{\mathcal{A}}(x) \cdot v(P_i), \end{aligned}$$

saj je $f(x) = \chi_{\mathcal{A}}(x) \cdot f(x) \leq M \cdot \chi_{\mathcal{A}}(x)$, kjer je $\chi_{\mathcal{A}}$ karakteristična funkcija množice $\mathcal{A}$.

Če je $\inf_{x \in P_i} \chi_{\mathcal{A}}(x) \neq 0$, to pomeni, da je $P_i \subset \mathcal{A}$, kar pa ne more biti, saj ima $\mathcal{A}$ mero 0, P_i pa ima mero $v(P_i) \neq 0$. (Mera 0 pomeni „tanko množico".) Od tod sledi, da so vsi sumandi na desni enaki 0 in zato $s(f, \mathcal{D}) \leq 0$. Ker je

$$\sup_{x \in P_i} f(x) = -\inf_{x \in P_i} \{-f(x)\},$$

je

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^{N} \sup_{x\in P_i} f(x)\cdot v(P_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{N} \inf_{x\in P_i} f(x)\cdot v(P_i) \\ &= -s(-f,\mathcal{D}). \end{aligned}$$

Enako kot prej je $s(-f,\mathcal{D}) \le 0$, zato $-s(-f,\mathcal{D}) = S(f,\mathcal{D}) \ge 0$. Dobili smo torej

$$S(f,\mathcal{D}) \ge 0 \ge s(f,\mathcal{D}).$$

Ker je f integrabilna, je $S = \inf\{S(f,\mathcal{D})\} = \sup\{s(f,\mathcal{D})\} = s$. Sledi $S = s = 0$. To pa pomeni $\int_{\mathcal{A}} f = 0$.

(b) Naj bo sedaj $f \ge 0$ in $\int_{\mathcal{A}} f = 0$. Za vsak $m \in \mathbb{N}$ naj bo $\mathcal{A}_m = \{x \in \mathcal{A} : f(x) > 1/m\}$. Pokažemo, da ima vsaka $\mathcal{A}_m$ volumen 0. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $\int_{\mathcal{A}} f = 0$, obstaja delitev $\mathcal{D}$ kvadra P tako fina, da je $S(f,\mathcal{D}) < \varepsilon/m$. Naj bodo $P_1, P_2, \ldots, P_k$ tisti kvadri te delitve, ki se sekajo z $\mathcal{A}_m$. Tedaj je

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} v(P_i) \le \sum_{i=1}^{k} \sup_{x\in P_i} f(x)\cdot v(P_i) < \varepsilon/m.$$

Na kvadrih P_i, ki sekajo $\mathcal{A}_m$, je $\sup_{x\in P_i} f(x) > 1/m$. Če primerjamo levi in desni del zgornjega izraza, dobimo $\sum_{i=1}^{k} v(P_i) < \varepsilon$.

Sklep: Za vsak $\varepsilon > 0$ smo znali $\mathcal{A}_m$ pokriti s končno mnogo kvadri, s skupno prostornino manjšo od ε, torej je $v(\mathcal{A}_m) = 0$. Torej ima $\mathcal{A}_m$ mero 0. Množica

$$\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x : f(x) > 1/m\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_m$$

je potem števna unija množic z mero 0 in zato ima mero 0. $\square$

Njabolj preprost primer množice, ki ima volumen, je kvader. Če je f zvezna funkcija na zaprtem kvadru P, je f na P omejena, torej je integrabilna.

Zgled: Dokaži, da je f integrabilna na $\mathcal{A}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin x + \sin \frac{1}{y}; & y \ne 0 \\ \sin x; & y = 0, \end{cases}$$

$\mathcal{A} = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

$\diamondsuit$

3.1 Lastnosti integrala

Izrek 30 *Naj bosta $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ omejeni podmnožici iz $\mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ in $f, g : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ integrabilni. Tedaj je*

(a) *$f + g$ je integrabilna na $\mathcal{A}$ in velja*

$$\int_{\mathcal{A}} (f+g) = \int_{\mathcal{A}} f + \int_{\mathcal{A}} g.$$

(b) *cf je integrabilna na $\mathcal{A}$ in velja*

$$\int_{\mathcal{A}} (cf) = c \int_{\mathcal{A}} f.$$

(c) *Če je $f(x) \leq g(x)$ za vse $x \in \mathcal{A}$, je*

$$\int_{\mathcal{A}} f \leq \int_{\mathcal{A}} g.$$

(d) *$|f|$ je integrabilna in je*

$$\left| \int_{\mathcal{A}} f \right| \leq \int_{\mathcal{A}} |f|.$$

(e) *Če ima $\mathcal{A}$ volumen in je $m \leq f(x) \leq M$, za vse $x \in \mathcal{A}$, je*

$$m \cdot v(\mathcal{A}) \leq \int_{\mathcal{A}} f \leq M \cdot v(\mathcal{A}).$$

(f) *Če je $\mathcal{A}$ kompaktna povezana množica z volumnom in f zvezna na $\mathcal{A}$, obstaja $x_0 \in \mathcal{A}$, da je*

$$\int_{\mathcal{A}} f = f(x_0) \cdot v(\mathcal{A}).$$

(g) *Naj bo tudi $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ in $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ taki, da so $f|_{\mathcal{A}}$, $f|_{\mathcal{B}}$ in $f|_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$ integrabilne funkcije in ima $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ mero 0. Tedaj je f integrabilna na $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ in velja*

$$\int_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} f = \int_{\mathcal{A}} f + \int_{\mathcal{B}} f.$$

V znatno skromnejšem obsegu smo lastnosti (a)-(g) spoznali že pri Analizi I.

Dokaz: Integrabilnost f na $\mathcal{A}$ pomeni: $\mathcal{A}$ vložimo v kvader P, razširimo f na $P \setminus \mathcal{A}$ z 0. Če je razširjena funkcija integrabilna na P, pomeni da je f integrabilna na $\mathcal{A}$, torej $\int_{\mathcal{A}} f = \int_P f$. Enako seveda velja za g.

(a) Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je f integrabilna, obstaja $\delta' > 0$, da za vse delitve $\mathcal{D}'$ kvadra P na kvadre s stranicami krajšimi od δ' in za vse izbire točk $x_i' \in P_i'$ velja

$$\left|\sum_{i=1}^{N'} f(x_i')v(P_i') - \int_{\mathcal{A}} f\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ker je g integrabilna, obstaja $\delta'' > 0$, da za vse delitve $\mathcal{D}''$ kvadra P na kvadre s stranicami krajšimi od δ'' in za vse izbire točk $x_i'' \in P_i''$ velja

$$\left|\sum_{i=1}^{N''} g(x_i'')v(P_i'') - \int_{\mathcal{A}} g\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Naj bo $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Tedaj za vsako delitev $\mathcal{D}$ s stranicami krajšimi od δ in za vsako izbiro točk $x_i \in P_i$ velja

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{N} \big(f(x_i) + g(x_i)\big)v(P_i) - \left(\int_{\mathcal{A}} f + \int_{\mathcal{A}} g\right)\right| \\ &\le \left|\sum_{i=1}^{N} f(x_i)v(P_i) - \int_{\mathcal{A}} f\right| - \left|\sum_{i=1}^{N} g(x_i)v(P_i) - \int_{\mathcal{A}} f\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Torej je $f + g$ integrabilna na P, t.j. integrabilna na $\mathcal{A}$, in je njen integral enak $\int_{\mathcal{A}} f + \int_{\mathcal{A}} g$, t.j. $\int_{\mathcal{A}}(f+g) = \int_{\mathcal{A}} f + \int_{\mathcal{A}} g$.

(b) podobno kot (a).

(c) Naj bo $f(x) \le g(x)$ za vse $x \in \mathcal{A}$. Tedaj je za vsako Riemannovo vsoto

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i)v(P_i) \le \sum_{i=1}^{N} g(x_i)v(P_i).$$

V limiti dobimo $\int_{\mathcal{A}} f \le \int_{\mathcal{A}} g$.

(d) Ker je f integrabilna P, ima množica nezveznosti funkcije f mero 0. Zato ima mero 0 tudi množica točk nezveznosti funkcije $|f|$, saj če je x točka nezveznosti $|f|$, je ista točka nezveznosti funkcie f. Podmnožica množice z mero 0 ima spet mero 0. Po Lebesgueovem izreku je $|f|$ integrabilna. Velja $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ za vsak $x \in P$. Zato iz točke (c) sledi

$$-\int_{\mathcal{A}} |f| \leq \int_{\mathcal{A}} f(x) \leq \int_{\mathcal{A}} |f(x)|$$

in končno

$$\left| \int_{\mathcal{A}} f \right| \leq \int_{\mathcal{A}} |f(x)|.$$

(e) $m \leq f(x) \leq M$ za vsak $x \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ ima volumen, torej obstaja $\int_{\mathcal{A}} 1 = \int_P \chi_{\mathcal{A}} = v(\mathcal{A})$. Zato po prejšnjem

$$\int_{\mathcal{A}} m \leq \int_{\mathcal{A}} f \leq \int_{\mathcal{A}} M$$

od koder sledi

$$m \int_{\mathcal{A}} 1 \leq \int_{\mathcal{A}} f \leq M \int_{\mathcal{A}} 1$$

oziroma

$$m \cdot v(\mathcal{A}) \leq \int_{\mathcal{A}} f \leq M \cdot v(\mathcal{A}).$$

(f) Naj bo f zvezna na $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ kompaktna, povezana množica z volumnom. Pokazati moramo, da obstaja $x_0 \in \mathcal{A}$, da je $\int_{\mathcal{A}} f = f(x_0)v(\mathcal{A})$. Če je $v(\mathcal{A}) = 0$ ni kaj dokazovati, saj je $\int_{\mathcal{A}} f = 0$. Naj bo torej $v(\mathcal{A}) \neq 0$. Tedaj iz $m \leq f(x) \leq M$ za vsak $x \in \mathcal{A}$ sledi po točki (e)

$$m \leq \frac{1}{v(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} f \leq M.$$

Ker je $\mathcal{A}$ kompaktna in povezana, f na njej zavzame vse vrednosti med $m = \min_{x \in \mathcal{A}} \{f(x)\}$ in $M = \max_{x \in \mathcal{A}} \{f(x)\}$, z m in M vred. Torej zavzame tudi vrednost $1/v(\mathcal{A}) \int_{\mathcal{A}} f$, t.j. obstaja x_0, da je

$$f(x_0) = \frac{1}{v(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} f.$$

(g) $f : \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ima mero 0. $f|_{\mathcal{A}}$, $f|_{\mathcal{B}}$ in $f|_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$ so integrabilne funkcije. Vložimo $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ v kvader in razširimo f z 0 na $P \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$. Naj bo $f_1 = f \cdot \chi_{\mathcal{A}}$, $f_2 = f \cdot \chi_{\mathcal{B}}$ in $f_3 = f \cdot \chi_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$. Po predpostavki so vse tri funkcije integabilne na $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ in

$$\int_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} f_1 = \int_{\mathcal{A}} f, \qquad \int_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} f_2 = \int_{\mathcal{B}} f, \qquad \int_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} f_3 = \int_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} f.$$

Na $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ pa velja $f = f_1 + f_2 - f_3$. Od tod po pravilu (a) sledi splošna formula, ki velja če $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ nima mere 0

$$\int_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} f = \int_{\mathcal{A}} f + \int_{\mathcal{B}} f - \int_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} f.$$

Če pa $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ima mero 0, je $\int_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} f = 0$, zato

$$\int_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} f = \int_{\mathcal{A}} f + \int_{\mathcal{B}} f.$$

□

3.2 Fubinijev Izrek

Izrek 31 (Fubini) *Naj bosta $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^m$ kvadra in naj bo funkcija f integrabilna na kvadru $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Pišimo $f(x, y)$, $x \in \mathcal{A}$ in $y \in \mathcal{B}$. Za vsak $x \in \mathcal{A}$ definirajmo $f_x : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, s predpisom $f_x(y) = f(x, y)$ in za vsak $y \in \mathcal{B}$ definirajmo $f_y : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, s predpisom $f_y(x) = f(x, y)$.*

Če je funkcija f_x integrabilna za vsak $x \in \mathcal{A}$, tedaj je

$$\int_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} f = \int_{\mathcal{A}} \left(\int_{\mathcal{B}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Podobno za funkcijo f_y, ki je integrabilna za vsak $y \in \mathcal{B}$,

$$\int_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} f = \int_{\mathcal{B}} \left(\int_{\mathcal{A}} f(x, y) dx \right) dy.$$

Opomba: f_x je funkcija $y \mapsto f(x, y)$ in f_y je funkcija $x \mapsto f(x, y)$. Precizneje:

$$f_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)} : (y_1, y_2, \ldots, y_m) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

$$f_{(y_1,y_2,\ldots,y_m)} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

Še enkrat opomnimo bralca na razliko med n-ternim in n-kratnim integralom.

Dokaz: Naj bo f_x integrabilna za vsak $x \in \mathcal{A}$. Naj bo $g(x) = \int_{\mathcal{B}} f_x(y) dy$ za $x \in \mathcal{A}$. Pokazati moramo, da je g integrabilna na $\mathcal{A}$ in da je $\int_{\mathcal{A}} g = \int_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} f$.

Naj bo $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_p$ delitev kvadra $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_r$ delitev kvadra $\mathcal{B}$. Kvadri $P_{ij} := \mathcal{A}_i \times \mathcal{B}_j$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tvorijo delitev kvadra

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Imenujmo to delitev $\mathcal{D}$.

$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in P_{ij}} f(x,y)$$

$$M_{ij} = \sup_{(x,y)\in P_{ij}} f(x,y)$$

Po predpostavki je $y \mapsto f_x(y) = f(x,y)$ integrabilna na $\mathcal{B}$ za vsak $x \in \mathcal{A}$. Torej, če je $c_i \in \mathcal{A}_i$, $i \in \{1,2,\dots,p\}$, je

$$\begin{aligned} g(c_i) &= \int_{\mathcal{B}} f(c_i,y)dy \\ &= \sum_{j=1}^{r} \int_{\mathcal{B}_j} f(c_i,y)dy. \end{aligned}$$

Ker je $c_i \in \mathcal{A}_i$ in $y \in \mathcal{B}_j$, je potem

$$m_{ij} \le f(c_i,y) \le M_{ij}.$$

Če integriramo po $\mathcal{B}_j$, dobimo

$$m_{ij} \cdot v(\mathcal{B}_j) \le \int_{\mathcal{B}_j} f(c_i,y)dy \le M_{ij} \cdot v(\mathcal{B}_j),$$

za vsak $c_i \in \mathcal{A}_i$, $i \in \{1,2,\dots,p\}$, $j \in \{1,2,\dots,r\}$. Pomnožimo z $v(\mathcal{A}_i)$, upoštevamo $v(\mathcal{B}_j) \cdot v(\mathcal{A}_i) = v(P_{ij})$ in seštejemo po indeksu j. Sledi

$$\sum_{j=1}^{r} m_{ij} \cdot v(P_{ij}) \le \left(\sum_{j=1}^{r}\left(\int_{\mathcal{B}_j} f(c_i,y)dy\right)\right) \cdot v(\mathcal{A}_i) \le \sum_{j=1}^{r} M_{ij} \cdot v(P_{ij}).$$

Seštejemo še po indeksu i. Sledi

$$s(f,\mathcal{D}) = \sum_{i,j} m_{ij} \cdot v(P_{ij}) \le \sum_{i=1}^{p} g(c_i)v(\mathcal{A}) \le \sum_{i,j} M_{ij} \cdot v(P_{ij}) = S(f,\mathcal{D}).$$

Ker je po predpostavki f na $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ integrabilna sta leva in desna stran poljubno blizu $I = \int_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} f$, če je le delitev kvadra $\mathcal{A}$ dovolj fina. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za poljubno delitev kvadra $\mathcal{A}$ na kvadre $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_p$, s stranicami krajšimi od δ, in poljubne $c_i \in \mathcal{A}_i$ velja

$$\left|\sum_{i=1}^{p} g(c_i)v(\mathcal{A}_i) - I\right| < \varepsilon.$$

To pa pomeni, da je funkcija g integrabilna na kvadru $\mathcal{A}$ in velja

$$\int_{\mathcal{A}} g = I = \int_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} f.$$

Podobno pokažemo drugo trditev. $\square$

Posledica 12 *Naj bosta $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^m$ zaprta kvadra in naj bo $f : \mathcal{A}\times\mathcal{B} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je*

$$\int_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathcal{A}}\left(\int_{\mathcal{B}} f(x,y)dy\right)dx = \int_{\mathcal{B}}\left(\int_{\mathcal{A}} f(x,y)dx\right)dy.$$

Dokaz: Od prej vemo, da je zvezna funkcija na zaprtem kvadru vedno integrabilna. Torej so vedno integrabilne funkcije na kvadru $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ za vsak $x \in \mathcal{A}$ funkcija $y \mapsto f(x,y)$ na $\mathcal{B}$ in za vsak $y \in \mathcal{B}$ funkcija $x \mapsto f(x,y)$ na $\mathcal{A}$. Presdpostavke Fubinijevega izreka so torej izpolnjene, vsi integrali obstajajo in so med seboj enaki. $\square$

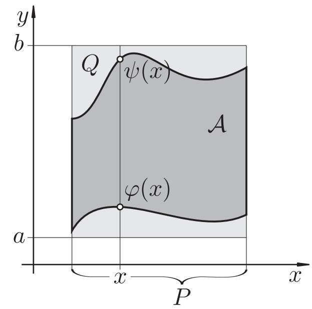
Naj bo g zvezna funkcija na zaprtem kvadru P v prostoru $\mathbb{R}^{n-1}$. Tedaj je graf, t.j. $\{(x,g(x)) : x \in P\}$ množica v $\mathbb{R}^n$ z volumnom 0.

Razlaga: zvezna funkcija g je na zaprtem kvadru vedno enakomerno zvezna. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in P$, sledi $|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Poiščimo δ, da bo iz $|x_1 - x_2| < \delta$ sledilo $|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon/v(P)$. Razdelimo kvader P na kvadrčke s premeri, manjšimi od δ, (premer kvadra pomeni telesno diagonalo). Razdelitev: $P_1, P_2, \ldots, P_N$. Na vsakem od teh kvadrov je razlika med največjo in najmanjšo vrednostjo funkcije manjša od $\varepsilon/v(P)$. To pa pomeni, da za vsak $i \in [i,N]$ obstaja interval $\mathcal{I}_i$, dolžine $\varepsilon/v(P_i)$, da je $f(P_i) \subset \mathcal{I}_i$. To pa pomeni, da je $\{(x,g(x)) : x \in P_i\}$ vsebovan v kvadru $P_i \times \mathcal{I}_i$, katerega prostornina je $v(P_i)\varepsilon/v(P)$. Celoten graf torej lahko pokrijemo s kvadri $P_i \times \mathcal{I}_i$, $i \in [i,N]$, s skupno prostornino, manjšo od $\sum_{i=1}^{N} v(P_i)\varepsilon/v(P) = v(P)\varepsilon/v(P) = \varepsilon$. Torej je graf množica v $\mathbb{R}^n$, z volumnom 0 in zato mero 0.

Posledica 13 *Naj bo P zaprt kvader v $\mathbb{R}^{n-1}$ in $\varphi, \psi : P \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji, za katere je $\varphi(x) \leq \psi(x)$, za vsak $x \in P$. Naj bo $\mathcal{A} = \{(x,y) : x \in P, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Naj bo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je*

$$\int_{\mathcal{A}} f = \int_P \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$



Slika 3.9: Skica v dveh dimenzijah

Dokaz: Funkciji φ, ψ sta zvezni na zaprtem kvadru P, zato sta tam omejeni, torej obstajata števili a, b, da ej $a < \varphi(x) \leq \psi(x) < b$ za vsak $x \in P$. Torej lahko naše območje $\mathcal{A}$ vložimo v kvader

$$\begin{aligned} Q &= P \times [a, b] \\ &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in P,\ a \leq x_n \leq b\}. \end{aligned}$$

Množica $\mathcal{A}$ je zaprta in omejena, saj $\mathcal{A} \subset Q$, torej kompaktna. Funkcija f pa je na $\mathcal{A}$ zvezna, torej na $\mathcal{A}$ omejena. Razširimo funkcijo f z množice $\mathcal{A}$ na ves Q tako, da postavimo $f(x) = 0$, če je $x \in Q \backslash \mathcal{A}$. Tako dobljena funkcija je omejena na kvadru Q in zvezna povsod, razen morda na „zgornjem" $\{(x, \varphi(x)) : x \in P\}$ in „spodnjem" robu $\{(x, \psi(x)) : x \in P\}$. Obe množici pa imata po zgornji diskusiji mero 0, zato je po Lebesgueovem izreku f integrabilna na $Q = P \times [a, b]$. Če je $x \in P$, je funkcija $y \mapsto f(x, y)$, definirana na $[a, b]$, omejena in zvezna povsod, razen morda v točkah $\varphi(x)$ in $\psi(x)$. Po Lebesgueovem izreku (ali morda kar iz Analize I) je torej $y \mapsto f(x, y)$ integrabilna za vsak $x \in P$. Po Fubinijevem izreku je

$$\int_Q f = \int_P \left(\int_a^b f(x, y) dy \right) dx.$$

Seveda pa je za vsak $x \in P$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x, y) dy &= \int_a^{\varphi(x)} f(x, y) dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy + \int_{\psi(x)}^b f(x, y) dy \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy, \end{aligned}$$

saj razširjena funkcija f na $[a, \varphi(x)]$ in $[\psi(x), b]$ identično enaka 0. Sledi torej

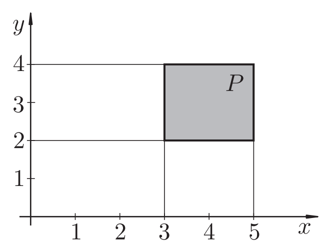
$$\int_{\mathcal{A}} f = \int_P \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

$\square$

Zgled: Izračunaj integral

$$\iint_P (x^2 + xy)dxdy,$$

$$P = \{(x,y) : 3 \leq x \leq 5,\ 2 \leq y \leq 4\}.$$



Slika 3.10: Skica za zgled 1

Integrand je elementarna funkcija, ki je povsod zvezna. Uporabimo Fubinijev izrek.

$$\begin{aligned}
\iint_P (x^2 + xy)dxdy &= \int_3^5 \left[\int_2^4 (x^2 + xy)dy \right] dx \\
&= \int_3^5 \left[x^2 + x\frac{y^2}{2} \right]_{y=2}^{y=4} dx \\
&= \int_3^5 \left(4x^2 - 2x^2 + \frac{16x^2}{2} - \frac{4x}{2} \right) dx \\
&= \int_3^5 (2x^2 + 6x)dx \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} + 3x^2 \right]_{x=3}^{x=5} \\
&= \frac{2 \cdot 5^3}{3} + 3 \cdot 5^2 - \frac{2 \cdot 3^3}{3} - 3 \cdot 3^2 \\
&= \frac{340}{3}.
\end{aligned}$$

Enako bi dobili, če bi vzeli

$$\iint_P (x^2 + xy)dxdy = \int_2^4 \left[\int_3^5 (x^2 + xy)dx \right] dy.$$

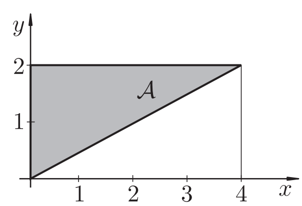
$\Diamond$

Zgled: Naj bo $\mathcal{A}$ trikotnik, omejen s premicami $x = 0$, $y = 0$ in $y = x/2$. Izračunaj

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} (x^2 + xy)dxdy.$$

Reševali bomo na dva načina:

(*i*) $P = [0, 4]$, $\quad \varphi(x) = \frac{x}{2}$, $\quad \psi(x) = 2$



Slika 3.11: Skica za zgled 2

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathcal{A}} (x^2 + xy)dxdy &= \int_0^4 \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (x^2 + xy)dy\right] dx \\
&= \int_0^4 \left[\int_{x/2}^{2} (x^2 + xy)dy\right] dx \\
&= \int_0^4 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{2}\right]_{y=x/2}^{y=2} dx \\
&= \int_0^4 \left(2x^2 + 2x - \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{8}\right) dx \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} + x^2 - \frac{5x^4}{32}\right]_{x=0}^{x=4} \\
&= \frac{2 \cdot 4^3}{3} + 4^2 - \frac{5 \cdot 4^4}{32} \\
&= \frac{56}{3}
\end{aligned}$$

(*ii*) $P = [0, 2]$, $\quad \Phi(y) = 0$, $\quad \Psi(x) = 2y$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathcal{A}} (x^2+xy)dxdy &= \int_0^2 \left[\int_0^{2y} (x^2+xy)dx\right] dy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{2}\right]_{x=0}^{x=2y} dy \\
&= \int_0^2 \frac{14y^3}{3} dy \\
&= \left[\frac{7y^4}{6}\right]_{y=0}^{y=2} \\
&= \frac{7\cdot 2^4}{6} \\
&= \frac{56}{3}
\end{aligned}$$

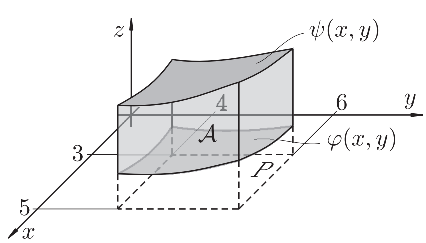
◊

Zgled: Izračunaj

$$\iiint\limits_{\mathcal{A}} (x+y+z)dxdydz,$$

kjer je

$$\mathcal{A} = \{(x,y,z) : 2(x^2+y^2) < z < 4(x^2+y^2),\ 3 \le x \le 5,\ 4 \le y \le 6\}.$$



Slika 3.12: Skica za zgled 3

Izračun:

$$P = \{(x,y) : 3 \le x \le 5,\ 4 \le y \le 6\},$$

$$\varphi(x,y) = 2(x^2+y^2),$$

$$\psi(x,y) = 4(x^2+y^2).$$

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_{\mathcal{A}} (x+y+z)dxdydz &= \iint\limits_{P} \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} (x+y+z)dz \right] dxdy \\
&= \iint\limits_{P} \left[\int_{2(x^2+y^2)}^{4(x^2+y^2)} (x+y+z)dz \right] dxdy \\
&= \iint\limits_{P} \left[xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_{z=2(x^2+y^2)}^{z=4(x^2+y^2)} dxdy \\
&= \iint\limits_{P} \left(6x^4 + 2x^3 + 12y^2x^2 + 2yx^2 + 2y^2x + 6y^4 + 2y^3 \right) dxdy \\
&= \int_4^6 \left[\frac{6x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + 4y^2x^3 + \frac{2yx^3}{3} + y^2x^2 + 6y^4x + 2y^3x \right]_{x=3}^{x=5} dy \\
&= \int_4^6 \left(12y^4 + 4y^3 + 408y^2 + \frac{196y}{3} + \frac{18652}{5} \right) dy \\
&= \left[\frac{12y^5}{5} + y^4 + 136y^3 + \frac{98y^2}{3} + \frac{18652y}{5} \right]_{y=4}^{y=6} \\
&= \frac{690464}{15}
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

Naj bo sedaj $\mathcal{D}$ odprta množica v $\mathbb{R}^{n-1}$ in naj bo f zvezna funkcija na $\mathcal{D}$. Tedaj ima graf

$$\Gamma(f) = \{ (x, f(x)) : x \in \mathcal{D} \}$$

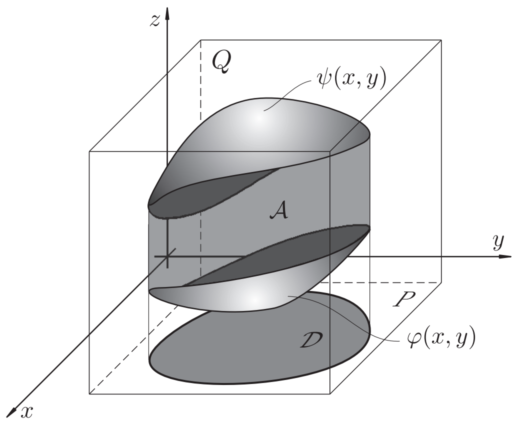
mero 0 v $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{D}$ vedno lahko zapišemo kot števno unijo zaprtih kvadrov P_j (premisli, kako), torej je

$$\Gamma(f) = \cup_{j=1}^{\infty} \{ (x, f(x)) : x \in P_j \}.$$

Za slednje množice pa že od prej vemo, da imajo vse volumen 0, torej ima $\Gamma(f)$, kot števna unija množic z mero 0, spet mero 0.

Posledica 14 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ omejena odprta množica z volumnom. Naj bosta na $\mathcal{D}$ definirani omejeni zvezni funkciji φ, ψ, za kateri velja $\varphi(x) < \psi(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}$. Naj bo $\mathcal{A} = \{(x,y) : \varphi(x) \le y \le \psi(x),\ y \in \mathcal{D}\}$ in naj bo f omejena zvezna funkcija na $\mathcal{A}$. Tedaj je f integrabilna na $\mathcal{A}$ in velja*

$$\int_{\mathcal{A}} f = \int_{\mathcal{D}} \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right] dx.$$



Slika 3.13: Skica v treh dimenzijah

Opomba: V prejšnji posledici je bil $\mathcal{D}$ kvader.

Dokaz: Ker sta φ in ψ omejeni, obstajata a, b, da je $a < \varphi(x) < \psi(x) < b$, $x \in \mathcal{D}$. Območje $\mathcal{D}$ vložimo v kvader $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ in tako $\mathcal{A}$ vložimo v kvader $Q \subset P \times [a, b]$. Funkcijo f razširimo do $\tilde{f}$ na Q tako, da jo na $Q \setminus \mathcal{A}$ postavimo na 0. Razširjena funkcija $\tilde{f}$ ima točke nezveznosti kvečjemu na robu množice $\mathcal{A}$, t.j. ali na množici $\{(x, y) : x \in \partial\mathcal{D}, a \leq y \leq b\}$, ki ima mero 0 v $\mathbb{R}^n$, saj ima (ker ima $\mathcal{D}$ volumen) $\partial\mathcal{D}$ volumen 0 v $\mathbb{R}^{n-1}$ ali pa na uniji grafov $\{\big(x, \varphi(x)\big) : x \in \mathcal{D}\}$, $\{\big(x, \psi(x)\big) : x \in \mathcal{D}\}$, ki imata oba mero 0, saj sta φ in ψ zvezni funkciji. Torej je f po Lebesgueovem izreku integrabilna na Q in zato tudi integrabilna na $\mathcal{A}$. Pri $\tilde{f}$ na Q uporabimo Fubinijev izrek. Dobimo

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{A}} f &= \int_Q \tilde{f} \\ &= \int_P \left[\int_a^b \tilde{f}(x, y) dy\right] dx \\ &= \int_{\mathcal{D}} \left[\int_a^b \tilde{f}(x, y) dy\right] dx,\end{aligned}$$

saj je $\tilde{f}(x, y)) = 0$, če $x \notin \mathcal{D}$. Zato notranji integral $\int_a^b \tilde{f}(x, y) dy = 0$, če $x \notin \mathcal{D}$.

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\int_a^b \tilde{f}(x, y) dy\right] dx = \int_{\mathcal{D}} \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy\right] dx,$$

saj je pri fiksnem $x \in \mathcal{D}$

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} 0, \ a < y < \varphi(y) \\ f(x,y), \ \varphi(x) < x < \psi(x) \\ 0, \ \varphi(x) < y < b. \end{cases}$$

□

3.3 Zamenjava spremenljivk (substitucija) v integralu

Iz Analize I se spomnimo: naj bo f zvezna na $[a,b]$ in φ zvezno odvedljiva funkcija, ki interval $[\alpha,\beta]$ preslika bijektivno na interval $[a,b]$ tako, da je $\varphi(\alpha) = a$ in $\varphi(\beta) = b$. Tedaj je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)dt.$$

V tem primeru je $\varphi'(t) \geq 0$. Če bi bila $\varphi'(t) \leq 0$, torej $\varphi(\alpha) = b$ in $\varphi(\beta) = a$, bi dobili

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx == & \int_b^a \big(-f(x)\big)dx \\ = & \int_\alpha^\beta \Big(-f\big(\varphi(t)\big)\Big) \cdot \varphi'(t)dt \\ = & \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \big(-\varphi'(t)\big)dt, \end{aligned}$$

pri tem je $-\varphi'(t) \geq 0$. Obe formuli skupaj bi lahko zapisali: Če je $\varphi : \mathcal{I} = [\alpha,\beta] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \varphi(\mathcal{I}) = [a,b]$ zvezno odvedljiva, je potem

$$\int_{\varphi(\mathcal{I})} f = \int_{\mathcal{I}} (f \circ \varphi) \cdot |\varphi'|.$$

Trditev 10 *Naj bo $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ omejena množica z volumnom in naj bo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ integrabilna na $\mathcal{A}$. Tedaj je $f|_{\operatorname{Int}\mathcal{A}}$ integrabilna in velja*

$$\int_{\mathcal{A}} f = \int_{\operatorname{Int}\mathcal{A}} f.$$

Opomba: Z $\operatorname{Int}\mathcal{A}$ smo označili notranjost množice $\mathcal{A}$.

Dokaz: Ker ima $\mathcal{A}$ volumen, je $\partial\mathcal{A}$ množica z mero 0. Ker je $\mathcal{A}$ omejena, je $\partial\mathcal{A}$ omejena zaprta množica, torej kompaktna in ima torej volumen 0. Ker je naša funkcija f integrabilna, je seveda omejena. Na množici z volumnom 0 je vsaka omejena funkcija integrabilna in njen integral po njej je enak 0. (Iz Darbouxovih vsot pri dovolj fini delitvi $S - s < \varepsilon$)

$\partial(\operatorname{Int}\mathcal{A}) \subset \partial\mathcal{A}$, ki pa je množica z mero 0, saj ima $\mathcal{A}$ volumen. Torej je $\partial(\operatorname{Int}\mathcal{A})$ tudi množica z mero 0, torej ima $\operatorname{Int}\mathcal{A}$ tudi volumen. Funkcija f je integrabilna na $\mathcal{A}$, torej če f razširimo na 0 na kvader P, ki vsebuje $\mathcal{A}$ ima množica točk nezveznosti razširjene funkcije mero 0, saj je razširjena funkcija integrabilna na P.

Naj bo $N = N_1 \cup N_2$, kjer je N_1 množica točk nezveznosti, ki so v $\operatorname{Int}\mathcal{A}$ in N_2 množica točk nezveznosti, ki so v $\partial\mathcal{A}$. Če $f|_{\operatorname{Int}\mathcal{A}}$ razširimo izven $\operatorname{Int}\mathcal{A}$ z 0, ima razširjena funckija množico točk nezveznosti v N_1 in na $\partial(\operatorname{Int}\mathcal{A}) \subset \partial\mathcal{A}$. Obe, N_1 in $\partial\mathcal{A}$ imata mero 0. Prva zato, ker je f integrabilna na $\mathcal{A}$ in ima zato po Lebesgueovem izreku njena množica točk nezveznosti mero 0. Za $\partial\mathcal{A}$ pa že vemo od prej, da ima mero 0. Po Lebesgueovem izreku sledi, da je $f|_{\operatorname{Int}\mathcal{A}}$ integrabilna na $\operatorname{Int}\mathcal{A}$. Razen tega, ker je $\mathcal{A} \setminus \operatorname{Int}\mathcal{A} \subset \partial\mathcal{A}$, ki ima volumen 0, ima tudi $\mathcal{A} \setminus \operatorname{Int}\mathcal{A}$ volumen 0. Iz lastnosti integrala sledi,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{A}} f &= \int_{\operatorname{Int}\mathcal{A}} f + \int_{\mathcal{A}\setminus\operatorname{Int}\mathcal{A}} f \\ &= \int_{\operatorname{Int}\mathcal{A}} f\,.\end{aligned}$$

□

Pri Analizi I smo imeli $\int_{\varphi(\mathcal{I})} f = \int_{\mathcal{I}} (f\circ\varphi)\cdot|\varphi|$. Sedaj bomo ta izrek posplošili. Naj bo $\mathcal{A}$ odprta množica v $\mathbb{R}^n$. Naj bo preslikava $g : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ diferenciabilna. Pišimo:

$$(Dg)(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix},$$

kjer $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$. Determinanto te matrike imenujemo Jacobijeva determinanta in pišemo

$$\det\big((Dg)(x)\big) := (Jg)(x)$$

oziroma

$$\det\big((Dg)(x)\big) := \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(x).$$

Izrek 32 *Naj bo $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica z volumnom $\neq 0$ (torej omejena) in $g : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ zvezno diferenciabilna injektivna preslikava. Naj bo $(Jg)(x) \neq 0$ za vse $x \in \mathcal{A}$ in naj bo funkcija $x \mapsto (Jg)(x)$ omejena na $\mathcal{A}$. Označimo $\mathcal{B} = g(\mathcal{A}) = \{g(x) : x \in \mathcal{A}\}$ in predpostavimo, da ima $\mathcal{B}$ volumen. Za vsako integrabilno funkcijo $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ je tedaj funkcija $x \mapsto (f \circ g)(x) \cdot |(Jg)(x)|$ integrabilna na $\mathcal{A}$ in velja*

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}} f &= \int_{\mathcal{A}} (f \circ g)|Jg| \\ &= \int_{\mathcal{A}} \big(f(g(x)\big)|(Jg)(x)|dx,\end{aligned}$$

torej

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}} f(y_1, \ldots, y_n)dy_1 \ldots y_n = \int_{\mathcal{A}} f\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n)\big)\cdot \\ \cdot |(Jg)(x_1, \ldots, x_n)|dx \ldots dx_n\end{aligned}$$

Opomba: Formula $\int_{g(\mathcal{A})} f = \int_{\mathcal{A}} (f \circ g)|Jg|$ je torej enaka kot pri funkciji ene spremenljivke, le absolutna vrednost odvoda se zamenja z absolutno vrednostjo Jacobijeve determinante.

Dokaz: Dokaz najdemo npr. v knjigi *M. Dobovišek: Riemannov in Lebesgueov integral v $\mathbb{R}^n$.* $\square$

Opomba: Ker je množica $\mathcal{A}$ odprta in $(Jg)(x) \neq 0$ za vse $x \in \mathcal{A}$ sledi, da se za vsak $a \in \mathcal{A}$ po izreku o inverzni funkciji okolica točke a preslika na okolico točke $g(a)$, saj $(Jg)(a) \neq 0$ pomeni, da je $(Dg)(a)$ nesingularna, t.j. okolico preslika v okolico in po izreku o inverzni funckiji torej g neko okolico točke

a difeomorfno preslika na neko okolico točke $g(a)$. Torej je $\mathcal{B}$ spet odprta in preslikava $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B} = g(\mathcal{A})$ je difeomorfizem.

Posledica 15 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ injektivna preslikava razreda $\mathcal{C}^1$. Funkcija $x \mapsto (Jg)(x)$ naj bo omejena na $\mathcal{D}$. Naj bo $(Jg)(x) \neq 0$ za vsak $x \in \mathcal{D}$. Naj bo $\mathcal{B} = g(\mathcal{D})$ in naj imata $\mathcal{D}$ in $\mathcal{B}$ volumen. Naj bo tudi $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ množica z volumnom in $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Tedaj je*

$$\int_{g^{-1}(\mathcal{A})} (f \circ g)|(Jg)| = \int_{\mathcal{A}} f.$$

Opomba: Če je $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, dobimo zgornji izrek.

Dokaz: $\mathcal{B}$ je po izreku o inverzni preslikavi odprta in $g : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ difeomorfizem. Funkcijo f razširimo z 0 na $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$. Razširjena funkcija je integrabilna na $\mathcal{B}$. Po formuli iz izreka velja

$$\int_{\mathcal{B}} (f \circ g)|(Jg)| = \int_{\mathcal{B}} f_{\text{razširjena}}.$$

Jasno je $\int_{\mathcal{A}} f = \int_{\mathcal{B}} f$, saj je $f = 0$ na $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$. Ker je $f = 0$ na $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$, je $f \circ g = 0$ na $\mathcal{D} \setminus g^{-1}(\mathcal{A})$. Zato je

$$\int_{\mathcal{D}} (f \circ g)|(Jg)| = \int_{g^{-1}(\mathcal{A})} (f \circ g)|(Jg)|.$$

Od tod sledi

$$\int_{\mathcal{A}} f = \int_{g^{-1}(\mathcal{A})} (f \circ g)|(Jg)|.$$

$\square$

3.3.1 Transformacija koordinatnega sistema

Radi bi določili posamezne formule za izračun integrala pri prehodu s kartezičnih koordinat na polarne, cilindrične in sferične koordinate.

Polarne koordinate v ravnini

Z izrazoma $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, kjer $r \in [0, \infty)$ in $\varphi \in [0, 2\pi)$, opišemo zvezo med kartezičnimi in polarnimi koordinatami.

Jacobijeva determinanta preslikave

$$g : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$$
$$g : (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

je

$$(Jg)(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Če je torej $|(Jg)(r,\varphi)| = r$, $(g : \mathcal{A} \to \mathcal{B})$, je

$$\int_{\mathcal{B}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathcal{A}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

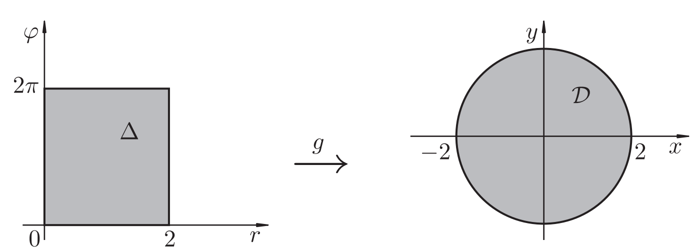
formula za izračun integrala pri prehodu s kartezičnih koordinat na polarne koordinate v ravnini.

Zgled: Izračunaj integral

$$\iint_{\mathcal{D}} (x+y)dxdy,$$

kjer $\mathcal{D} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Na spodnji sliki vidimo, da se območje $\Delta = \{(r,\varphi) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ preslika na $\mathcal{D}$, t.j. pravokotnik $[0,2] \times [0,2\pi)$ se preslika na krog s središčem v izhodišču in polmerom 2.



Slika 3.14: Transformacija koordinat

Uporabimo zgornjo formulo in dobimo

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathcal{D}} (x+y)\,dxdy &= \iint\limits_{\Delta} (r\cos\varphi + r\sin\varphi) r dr d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 (\cos\varphi + \sin\varphi) dr \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi) \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2} d\varphi \\
&= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \\
&= \frac{8}{3} [\sin\varphi - \cos\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\
&= \frac{8}{3} (0 - 1 - 0 + 1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\Diamond$

Cilindrične koordinate

Z izrazi $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ kjer $r \in [0, \infty)$ in $\varphi \in [0, 2\pi)$, opišemo zvezo med kartezičnimi in cilindričnimi koordinatami v prostoru.

Jacobijeva determinanta preslikave

$$g : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$g : (r, \varphi, z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

je

$$(Jg)(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Če je torej $|(Jg)(r, \varphi, z)| = r$, $(g : \mathcal{A} \to \mathcal{B})$, je

$$\int_{\mathcal{B}} f(x, y, z) dxdydz = \int_{\mathcal{A}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dr d\varphi dz$$

formula za izračun integrala pri prehodu s kartezičnih koordinat na cilindrične koordinate.

Polarne koordinate v prostoru (Sferične koordinate)

Z izrazi $x = r\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = r\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = r\sin\vartheta$, kjer $r \in [0,\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi)$ in $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, opišemo zvezo med kartezičnimi in sferičnimi koordinatami v prostoru.

Jacobijeva determinanta preslikave

$$g : \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$$
$$g : (r,\varphi,\vartheta) \mapsto (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$$

je

$$(Jg)(r,\varphi,\vartheta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{vmatrix}$$
$$= r^2\cos\vartheta.$$

Če je torej $|(Jg)(r,\varphi,\vartheta)| = r^2\cos\vartheta$, $(g : \mathcal{A} \to \mathcal{B})$, je

$$\int_{\mathcal{B}} f(x,y,z)dxdydz = \int_{\mathcal{A}} f(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)r^2\cos\vartheta drd\varphi d\vartheta$$

formula za izračun integrala pri prehodu s kartezičnih koordinat na sferične koordinate.

Zgled: Izračunaj integral

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} (x^2+y^2+z^2)dxdydz,$$

kjer $\mathcal{D} = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4\}$.

Območje $\Delta = \{(r,\varphi,\vartheta) : 0 \le r \le 2, 0 \le \varphi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\}$ se preslika na $\mathcal{D}$, t.j. kvader $[0,2] \times [0,2\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ se preslika na kroglo s središčem v izhodišču in polmerom 2.

Uporabimo zgornjo formulo in dobimo

$$
\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\mathcal{D}} (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \\
&\quad = \iint\limits_{\Delta} (r^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + r^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + r^2\sin^2\vartheta) r^2\sin^2\vartheta dr d\varphi d\vartheta \\
&\quad = \iint\limits_{\Delta} r^4\cos\vartheta dr d\varphi d\vartheta \\
&\quad = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^4\cos\vartheta dr \\
&\quad = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos\vartheta \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=2} d\varphi \\
&\quad = \frac{2^5 2\pi}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta d\vartheta \\
&\quad = \frac{2^5 2\pi}{5} [\sin\vartheta]_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \\
&\quad = \frac{2^7\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

3.4 Uporaba dvojnega in trojnega integrala v geometriji in fiziki

3.4.1 Ploščina območja v ravnini

Naj bo $\mathcal{D}$ območje v ravnini volumnom, t.j. ploščino. Ploščina območja $\mathcal{D}$ je

$$p(\mathcal{D}) = \iint\limits_{\mathcal{D}} 1\, dxdy.$$

Zgled: Izračunaj ploščino območja v ravnini

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : x^2+y^2 < r^2\},$$

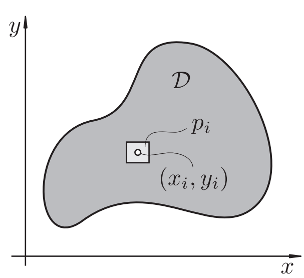
t.j. kroga s polmerom r. *Namig: uporabi polarne koordinate.*

$$\begin{aligned} p(\mathcal{D}) &= \iint\limits_{\mathcal{D}} 1 dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r 1 \cdot r dr \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\varphi \\ &= \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

3.4.2 Masa plošče

Na x-y ravnini je položena plošča, ki ravno pokrije območje $\mathcal{D}$, ki je omejeno z volumnom. Masa je porazdeljena po plošči s ploskovno gostoto $\rho(x, y)$. Funkcija ρ naj bo omejena, nenegativna in zvezna.



Slika 3.15: Masa plošče

Razdelimo ravnino na pravokotnike. Gledamo tiste, ki so znotraj območja $\mathcal{D}$. Masa i-tega pravokotnika je približno $\rho(x_i, y_i) \cdot p_i$, pri tem je (x_i, y_i) točka v pravokotniku, p_i pa njegova ploščina. Približek za maso je

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i) \cdot p_i,$$

kjer je n število pravokotnikov znotraj območja $\mathcal{D}$.

Finejša delitev pomeni boljši približek. V limiti pa dobimo točno vrednost za maso.

$$m = \iint\limits_{\mathcal{D}} \rho(x,y)dxdy.$$

3.4.3 Težišče plošče

Ploščo aproksimiramo s točkastim sistemom mas. Masa i-tega pravokotnika je približno enaka $\rho(x_i,y_i)\cdot p_i$. Težišče takega sistema mas je točka (x_T,y_T), ki jo dobimo iz enačb

$$x_T = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \rho(x_i,y_i)\cdot p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i,y_i)\cdot p_i}$$

in

$$y_T = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot \rho(x_i,y_i)\cdot p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i,y_i)\cdot p_i},$$

saj iz momentnega pogoja sledi $\sum x_i m_i = x_T \sum m_i$ in $\sum y_i m_i = y_T \sum m_i$. V limiti (finejša delitev) dobimo

$$x_T = \frac{\iint\limits_{\mathcal{D}} x\cdot\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_{\mathcal{D}} \rho(x,y)dxdy} = \frac{1}{m}\iint\limits_{\mathcal{D}} x\cdot\rho(x,y)dxdy$$

in

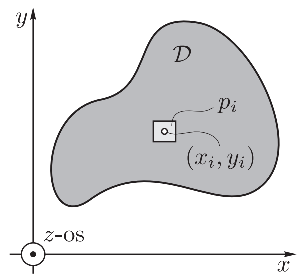
$$y_T = \frac{\iint\limits_{\mathcal{D}} y\cdot\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_{\mathcal{D}} \rho(x,y)dxdy} = \frac{1}{m}\iint\limits_{\mathcal{D}} y\cdot\rho(x,y)dxdy.$$

3.4.4 Vztrajnostni momenti plošče

Približek za vztrajnostni moment glede na x-os je

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \rho(x_i,y_i)\cdot p_i,$$

pri čemer je $\rho(x_i,y_i)\cdot p_i$ masa i-tega pravokotnika.



Slika 3.16: Vztrajnostni moment plošče

V limiti dobimo

$$J_x = \iint_{\mathcal{D}} y^2 \rho(x, y) dx dy.$$

Podobno velja tudi za vztrajnostni moment glede na y-os.

$$J_y = \iint_{\mathcal{D}} x^2 \rho(x, y) dx dy.$$

Približek za vztrajnostni moment plošče glede na z-os pa je

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) \rho(x_i, y_i) \cdot p_i.$$

V limiti dobimo

$$J_z = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy.$$

3.4.5 Prostornina telesa

Naj bo $\mathcal{D}$ območje v prostoru z volumnom. Volumen območja $\mathcal{D}$ je

$$v(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} 1 dx dy.$$

Zgled: Izračunaj prostornino območja v prostoru

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < r^2\},$$

t.j. krogle s polmerom r. *Namig: uporabi polarne koordinate.*

$$\begin{aligned}
v(\mathcal{D}) &= \iiint\limits_{\mathcal{D}} 1dxdy \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r 1 \cdot r^2 \cos\vartheta dr \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3} \cos\vartheta d\varphi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\pi r^3}{3} \cos\vartheta d\vartheta \\
&= \left[\frac{2\pi r^3}{3} \sin\vartheta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{4\pi r^3}{3}
\end{aligned}$$

$\Diamond$

3.4.6 Masa telesa

Dano je telo $\mathcal{D}$ v prostoru (omejeno, z volumnom). Masa je porazdeljena po telesu z volumsko gostoto $\rho(x, y, z)$. Funkcija ρ naj bo omejena, nenegativna in zvezna. Podobno kot v ravnini razdelimo telo na kvadre s prostorninami $v_1, v_2, \ldots, v_n$. V i-tem kvadru izberemo točko (x_i, y_i, z_i). Približek za maso i-tega kvadra je

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot v_i,$$

kjer je n število pravokotnikov znotraj območja $\mathcal{D}$.

Finejša delitev pomeni boljši približek. V limiti pa dobimo točno vrednost za maso.

$$m = \iiint\limits_{\mathcal{D}} \rho(x, y, z) dxdydz.$$

3.4.7 Težišče območja v prostoru

Tako kot v ravnini aproksimiramo telo s točkastim („kvaderčkastim”) sistemom mas. Masa i-tega kvadra je približno enaka $\rho(x_i, y_i, z_i) \cdot v_i$. Težišče takega sistema mas je točka (x_T, y_T, z_T), ki jo dobimo iz enačb

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot v_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot v_i},$$

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot v_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot v_i}$$

in

$$z_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot v_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot v_i}$$

saj iz momentnih pogojev sledi $\sum x_i m_i = x_T \sum m_i$, $\sum y_i m_i = y_T \sum m_i$ in $\sum z_i m_i = z_T \sum m_i$. V limiti (finejša delitev) dobimo

$$x_T = \frac{\iiint\limits_{\mathcal{D}} x \cdot \rho(x,y,z) dxdydz}{\iiint\limits_{\mathcal{D}} \rho(x,y) dxdydz} = \frac{1}{m} \iiint\limits_{\mathcal{D}} x \cdot \rho(x,y,z) dxdydz,$$

$$y_T = \frac{\iiint\limits_{\mathcal{D}} y \cdot \rho(x,y,z) dxdydz}{\iiint\limits_{\mathcal{D}} \rho(x,y) dxdydz} = \frac{1}{m} \iiint\limits_{\mathcal{D}} y \cdot \rho(x,y,z) dxdydz$$

in

$$z_T = \frac{\iiint\limits_{\mathcal{D}} z \cdot \rho(x,y,z) dxdydz}{\iiint\limits_{\mathcal{D}} \rho(x,y) dxdydz} = \frac{1}{m} \iiint\limits_{\mathcal{D}} z \cdot \rho(x,y,z) dxdydz.$$

Vztrajnostni momenti teles

Približek za vztrajnostni moment telesa okrog x-osi:

$$\sum (y_i^2 + z_i^2) \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot v_i,$$

kjer sta y_i in z_i koordinati oddaljenosti točke (x_i, y_i, z_i) od x-osi in $\rho(x_i, y_i, z_i)\cdot v_i$ masa i-tega masnega delčka. V limiti dobimo

$$J_x = \iiint_{\mathcal{D}} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz.$$

Podobno velja za vztrajnostni moment okrog y in z osi.

$$J_y = \iiint_{\mathcal{D}} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz$$

$$J_z = \iiint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz$$

Opomba: Tako pri ploščah, kot tudi pri telesih, veljajo te formule za integrabilne funkcije, ne samo za zvezne. Tak primer nezvezne porazdelitve gostote vzdolž materiala je npr. krogla, sestavljena iz polkrogel iz različnih materialov.

3.5 Posplošeni Riemannov integral

Kako (morda) definirati integral $\int_{\mathcal{D}} f$, če je območje $\mathcal{D}$ neomejeno, ali če funkcija f ni omejena? Tedaj običajni Riemannov integral ne obstaja.

Definirajmo izraz „skoraj povsod”, t.j. povsod, razen na množici z mero 0.

Definicija 34 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ množica, katere rob ima mero 0. Naj bo $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ funkcija, zvezna povsod na $\mathcal{D}$, razen morda na množici z mero 0, t.j. zvezna skoraj povsod na $\mathcal{D}$. Razširimo f na ves $\mathbb{R}^n$ tako, da jo izven $\mathcal{D}$ postavimo na 0. Razširjena funkcija je tedaj zvezna skoraj povsod na $\mathbb{R}^n$. Definirana je povsod na $\mathbb{R}^n$, ni pa nujno omejena.*

Naj bo

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : f \text{ je neomejena v vsaki okolici točke } x\}.$$

Množica $\mathcal{P}$ vsebuje vsa svoja stekališča, torej je zaprta. Vsebovana je v množici točk nezveznosti funkcije f. Torej ima množica $\mathcal{P}$, kot podmnožica množice z mero 0, mero 0. Jasno je $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$ odprta množica.

Naj bo $\mathcal{K}_f$ množica vseh kompaktnih množic $\mathcal{K}$ z volumnom (kompaktna v $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ omejena + zaprta), vsebovanih v $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$.

Trditev 11 *Če je $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_f$, tedaj je f integrabilna na $\mathcal{K}$, t.j. obstaja $\int_{\mathcal{K}} f$.*

Dokaz: $\mathcal{K}$ je omejena množica in ima volumen. Funkcija f pa je na $\mathcal{K}$ omejena. Če ne bi bila, bi obstajalo tako zaporedje $\{x_n\}$, da bi veljalo $|f(x_n)| > n$. Ker je $\mathcal{K}$ kompaktna, $\{x_n\}$ vsebuje konvergentno podzaporedje x_{n_k}, ki konvergira k $x \in \mathcal{K}$. To pa pomeni ($|f(x_{n_k})| > n_k$, za vse k), da je f neomejena v vsaki okolici točke x, torej je $x \in \mathcal{P}$. To pa je v protislovju s $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n \setminus P$.

Če funkcijo f izven $\mathcal{K}$ razširimo z 0, ima razširjena funkcija nezveznosti v robu $\mathcal{K}$, ki ima mero 0, saj ima $\mathcal{K}$ volumen in v kakšnih notranjih točkah $\mathcal{K}$, a množica takih točk je podmnožica množice točk nezveznosti prvotne funkcije f, torej ima mero 0. Torej je po Lebesgueovem izreku f res integrabilna na $\mathcal{K}$. □

Definicija 35 *Naj bo $f \geq 0$. Tedaj definiramo*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup_{K \in \mathcal{K}_f} \left\{ \int_{\mathcal{K}} f \right\}.$$

Opomba: To je lahko ∞.

Opomba: Pravimo, da zaporedje $\{\mathcal{K}_n\}$ izčrpa množico $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$, če ima naslednji lastnosti

(*i*) $\mathcal{K}_1 \subset \operatorname{Int} \mathcal{K}_2 \subset \operatorname{Int} \mathcal{K}_3 \subset \dots$,

(*ii*) $\cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}_j = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$,

pri čemer je $\mathcal{K}_j \in \mathcal{K}_f$ za vse j. Tako zaporedje $\{\mathcal{K}_n\}$ je mogoče konstruirati, ker je $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$ odprta množica. Ker je $f \geq 0$, je zato $\int_{\mathcal{K}_j} f$ naraščajoče zaporedje, saj je

$$\int_{\mathcal{K}_{j+1}} = \int_{\mathcal{K}_j} f + \int_{\mathcal{K}_{j+1} \setminus \mathcal{K}_j} f,$$

za vse j. Razen tega velja še tole: Če je $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_f$, tedaj obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_N$. To je zato, ker je

$$\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P} = \cup_{j=1}^{\infty} \operatorname{Int} \mathcal{K}_j$$

odprto pokritje za $\mathcal{K}$, torej zaradi kompaktnosti je

$$\mathcal{K} \subset \cup_{j=1}^{N} \operatorname{Int} \mathcal{K}_j \subset \mathcal{K}_N.$$

Torej je

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f &= \sup_{\mathcal{K}\in\mathcal{K}_f} \int_{\mathcal{K}} f \\ &\overset{*}{=} \sup_n \int_{\mathcal{K}_n} f \\ &\overset{**}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{K}_n} f,\end{aligned}$$

$*$ jasno je leva stran $\geq$ od desne,

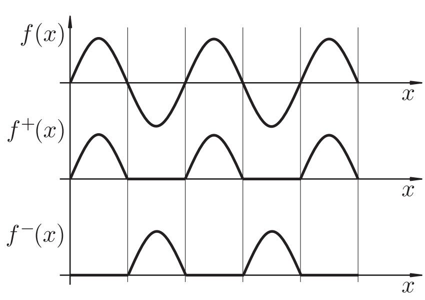
$**$ ker je zaporedje monotono.

Obratno: Ker je vsak $\mathcal{K}$ vsebovan v nekem $\mathcal{K}_N$, je

$$\int_{\mathcal{K}} f \leq \int_{\mathcal{K}_N} f,$$

za nek N. Zato je leva stran zgoraj $\leq$ desne strani.

Naj bo sedaj f poljubnega predznaka. Predpostavimo, da je $\int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty$. Pišimo $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ in $f^-(x) = \min\{-f(x), 0\}$.



Slika 3.17: Funkcije f, f^+ in f^-

Funkciji f^+, f^- sta lahko nezvezni le tam, kjer je že f nezvezna. Velja

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Predpostavili smo, da je $\int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty$, t.j. $\sup_n \int_{\mathcal{K}_n} |f| < 0$, zato $\sup_n \int_{\mathcal{K}_n} f^+ < 0$ in $\sup_n \int_{\mathcal{K}_n} f^- < 0$, saj je $f^+ \leq |f|$ in $f^- \leq |f|$ za $x \in \mathbb{R}^n$. Torej obstajata

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{K}_n} f^+ = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{K}_n} f^-$$

(zaradi zgornjega je $\sup_n = \lim_{n\to\infty}$). Ker je $f = f^+ - f^-$, zato obstaja

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{K}_n} f &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{K}_n}(f^+ - f^-)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{K}_n} f^+ - \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{K}_n} f^-.\end{aligned}$$

Torej, ker obstajata obe limiti na desni, obstaja $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{K}_n} f$. Ta limita je neodvisna od tega, kakšno zaporedje $\{\mathcal{K}_n\}$, ki izčrpa $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$, izberemo.

Zaključek: Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ množica, katere rob ima mero 0. Naj bo $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ zvezna skoraj povsod na $\mathcal{D}$. Razširimo f z 0 zunaj $\mathcal{D}$. Razširjena f je torej zvezna skoraj povsod na $\mathbb{R}^n$. Naj bo $\mathcal{P}$ množica točk, v katerih f ni omejena.

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : f \text{ je neomejena v vsaki okolici točke } x\}$$

Množica $\mathcal{P}$ je zaprta in vsebovana v množici točk nezveznosti funkcije f. Izčrpamo odprto množico $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$ s kompaktnimi množicami, da je

$$\mathcal{K}_1 \subset \operatorname{Int}\mathcal{K}_2 \subset \operatorname{Int}\mathcal{K}_3 \subset \ldots,$$

$$\cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{K}_j = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}.$$

Na vsaki $\mathcal{K}_j$ je f integrabilna. Predpostavimo, da je $\sup_n \int_{\mathcal{K}_n}|f| < \infty$. Torej obstaja $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{K}_n} f$. To limito imenujemo posplošeni integral funkcije f po množici $\mathcal{D}$ in ga označimo z $\int_{\mathcal{D}} f = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{K}_n} f$. Ta definicija je dobra, saj limita ni odvisna od izbire zaporedja $\mathcal{K}_n$.

Zgled: Izračunaj

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$$

kjer je

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Funkcija f ni omejena v izhodišču, torej bo to posplošen Riemannov integral.

V tem primeru je funkcija nenegativna in $\mathcal{P} = \{(0,0)\}$, t.j. samo ena točka. Množico $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ izčrpamo s kompaktnimi množicami, npr. s

$$\mathcal{K}_n = \{(x,y) : \tfrac{1}{n} < \sqrt{x^2+y^2} < 1 - \tfrac{1}{n}\},$$

kjer $n \in \{3, 4, \ldots\}$. Pri izračunu integrala si pomagamo s polarnimi koordinatami.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{K}_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{r} r dr \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(2\pi - \frac{4\pi}{n}\right) \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Torej je $\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = 2\pi$. ◊

Zgled: Izračunaj integral

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy,$$

kjer je

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 4\}.$$

Območje integracije ni omejeno, torej bo to posplošen Riemannov integral.

Funkcija je nenegativna in $\mathcal{P} = \emptyset$. Množico $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P} = \mathbb{R}^2$, podobno kot v prejšnjem primeru, izčrpamo s kompaktnimi množicami, npr. s

$$\mathcal{K}_n = \{(x, y) : 4 + \tfrac{1}{n} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq n\},$$

kjer $n \in \{5, 6, \ldots\}$. Pomagamo si s polarnimi koordinatami.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{K}_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{4+\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{r^4} r dr \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{\pi}{n^2} + \frac{\pi}{(4+\frac{1}{n})^2}\right) \\
&= \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Torej je $\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \frac{\pi}{16}$. ◊

Poglavje 4

Krivuljni in ploskovni integral

Definicija 36 *Gladka pot v prostoru* $\mathbb{R}^3$ *je preslikava* $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ *razreda* $\mathcal{C}^1$*. Tir gladke poti je njena zaloga vrednosti, t.j.* $g([\alpha, \beta]) = \{g(t); t \in [\alpha, \beta]\}$.

Opomba: Torej imamo tri funkcije razreda $\mathcal{C}^1$ na $[\alpha, \beta]$, to so g_1, g_2, g_3, da je

$$g(t) = \big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\big), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Pot... gibanje (fizikalni pojem), tir... sled tega gibanja (geometrijski pojem).

Spomnimo se iz Analize I, da ima lahko gladka krivulja tudi samopresečne točke.

Definicija 37 *Gladkek lok v prostoru* $\mathbb{R}^3$ *je tir gladke poti* $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$, *za katero dodatno velja:*

(i) g *je na* $[\alpha, \beta]$ *injektivna, t.j.* $t_1 \neq t_2 \Rightarrow g(t_1) \neq g(t_2)$.

(ii) $g'(t) \neq 0$ *za vse* $t \in [\alpha, \beta]$.

Opomba: Pogoj (ii) pomeni, da je za vsak $t \in [\alpha, \beta]$ vsaj eden od odvodov $g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t)$ različen od 0. Če je $x = g_1(t)$, $y = g_2(t)$, $z = g_3(t)$ in npr. $g_1'(t_0) \neq 0$, za nek $t_0 \in (\alpha, \beta)$, je mogoče enačbo $x = g_1(t)$ v okolici $x_0 = g_1(t_0)$

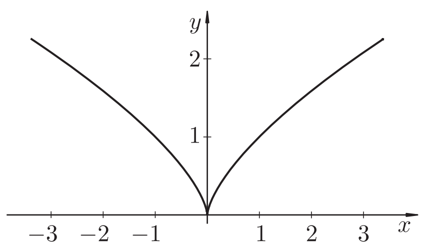
razrešiti na t, $t = \varphi(x)$ in nato dobimo $y = g_2(t) = g_2\big(\varphi(x)\big) = y(x)$, $z = g_3(t) = g_3\big(\varphi(x)\big) = z(x)$. To pomeni, da košček tira

$$\{\big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\big) : t \in \text{ okolice}(t_0)\}$$

lahko zapišemo kot $\{\big(x, y(x), z(x)\big) : x \in \text{ okolice}(x_0)\}$. To pa vemo kako izgleda. Podobno velja v primeru, ko je $g_2'(t_0) \neq 0$ ali $g_3'(t_0) \neq 0$.

Opomba: Nič takega pa ne bo res v točkah, kjer bi bili $g_1'(t) = g_2'(t) = g_3'(t) = 0$, takih po predpostavki ni.

Zgled: Krivulja, dana z $x = t^3$, $y = t^2$, $z = 0$, $t \in \mathbb{R}$, ni gladka v izhodišču.



Slika 4.1: Krivulja, ki ni gladka.

Definicija 38 *Če je $\mathcal{L} = g(\mathcal{I})$, kjer je $\mathcal{I} = [\alpha, \beta]$, g pa ima lastnosti iz definicije gladke krivulje, pravimo, da je g regularna parametrizacija krivulje (loka) $\mathcal{L}$.*

4.1 Krivulje

4.1.1 Podajanje krivulj

Eksplicitna oblika

Naj bosta p in q gladki funkciji na $[a, b]$. Tedaj je

$$\mathcal{L} = \{(x, y, z) : y = p(x), z = q(x), a \leq x \leq b\}$$

nek gladek lok v prostoru,

$$t \mapsto \big(t, p(t), q(t)\big) \qquad a \leq x \leq b$$

je njegova regularna parametrizacija z enačbama

$$\begin{aligned} y &= p(x) \\ z &= q(x) \end{aligned} \qquad a \le x \le b$$

Pravimo, da je $\mathcal{L}$ dan eksplicitno, torej kot graf vektorske funkcije $x \mapsto \big(p(x), q(x)\big)$.

Podobno bi lahko imeli, če bi vlogo spremenljivk x, y z zamenjali, npr.

$$\begin{aligned} x &= p(z) \\ y &= q(z) \end{aligned} \qquad a \le z \le b$$

ali

$$\begin{aligned} z &= p(y) \\ x &= q(y) \end{aligned} \qquad a \le y \le b$$

Implicitna oblika

Krivulja je dana kot presek dveh ploskev, t.j. kot množica rešitev sistema enačb

$$(*) \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Vemo: množica rešitev (x, y, z) sistema $(*)$ bo lokalno gladek lok, če bo v vsaki točki (x, y, z), kjer hkrati veljata enačbi $(*)$ rang matrike

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{bmatrix}$$

maksimalen, torej enak 2.

Zgled: Vzemimo

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$$

$$x + y + z = 0,$$

t.j. sfera s polmerom 2, s središčem v izhodišču in ravnina skozi izhodišče. Njun presek je krožnica. $\Diamond$

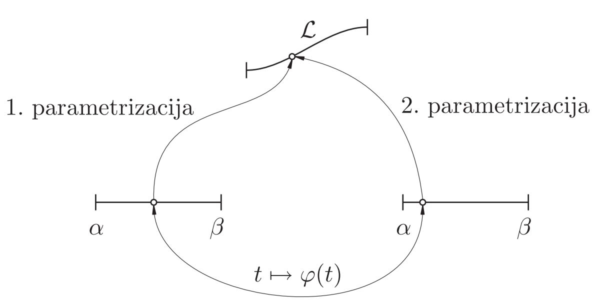
Parametrična oblika

Parametrično podana krivulja

$$
\begin{aligned}
x &= g_1(t) \\
y &= g_2(t) \qquad t \in [\alpha, \beta], \\
z &= g_3(t)
\end{aligned}
$$

kjer je g regularna parametrizacija loka $\mathcal{L} = \{\big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\big) : t \in [\alpha, \beta]\}$, t.j. $g_1, g_2, g_2 \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta])$, preslikava $t \mapsto \big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\big)$ injektivna na $[\alpha, \beta]$ in $g_1'(t)^2 + g_2'(t)^2 + g_3'(t)^2 \neq 0$.

Opomba: Regularnih parametrizacij istega loka je veliko. Npr. če je $\varphi : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ gladka bijekcija in $\varphi'(t) \neq 0$ za vse t, tedaj velja: če je $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija, je $t \mapsto g\big(\varphi(t)\big)$, $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$, spet regularna parametrizacija. Velja tudi obratno: če sta g, h regularni parametrizaciji loka $\mathcal{L}$, $g, h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$, $g([\alpha, \beta]) = h([\alpha, \beta]) = \mathcal{L}$. Tedaj obstaja $\mathcal{C}^1$ difeomorfizem $\varphi : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$, da je $g(t) = h\big(\varphi(t)\big)$ za vse $t \in [\alpha, \beta]$. φ je:
– ali tak, da je $\varphi'(t) > 0$ za vse t, torej $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\varphi(\beta) = \beta$.
– ali tak, da je $\varphi'(t) < 0$ za vse t, torej $\varphi(\alpha) = \beta$, $\varphi(\beta) = \alpha$.



Slika 4.2: Regularnih parametrizacij istega loka je več.

Opomba: Če pogoj $g'(t) \neq 0$ ni izpoljnjen za vse t, je tir poti lahko gladka krivulja, lahko pa tudi ne, npr. $x = t^3$, $y = t^3$, $t \in [-1, 1]$, je gladka krivulja medtem, ko $x = t^3$, $y = t^2$, $t \in [-1, 1]$ pa ni gladka krivulja, glej 4.1.

Opomba: V parametrični obliki ponavadi pišemo $r(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

4.1.2 Dolžina loka

Naj bo $\mathcal{L}$ gladek lok in $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ njegova regularna parametrizacija. Kot v ravnini (glej Analiza I), definiramo

$$\ell(\mathcal{L}) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{g}_1(t)^2 + \dot{g}_2(t)^2 + \dot{g}_3(t)^2}dt$$

oziroma

$$\begin{aligned} s &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\langle \dot{r}(t), \dot{r}(t)\rangle}dt \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}dt \end{aligned}$$

Opomba: Definicija je dobra, saj je v primeru neke druge regularne parametrizacije, npr. h, $h(t) = g\big(\varphi(t)\big)$, kjer je $\varphi : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ difeomorfizem. Torej

$$\begin{aligned} &\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{h}_1(t)^2 + \dot{h}_2(t)^2 + \dot{h}_3(t)^2}dt = \\ &\qquad = \int_\alpha^\beta \sqrt{\big(\dot{g}_1\big(\varphi(t)\big)\dot{\varphi}(t)\big)^2 + \big(\dot{g}_2\big(\varphi(t)\big)\dot{\varphi}(t)\big)^2 + \big(\dot{g}_3\big(\varphi(t)\big)\dot{\varphi}(t)\big)^2}dt, \end{aligned}$$

saj

$$h_k(t) = g_k\big(\varphi(t)\big) \quad \Rightarrow \quad \dot{h}_k(t) = \dot{g}_k\big(\varphi(t)\big)\dot{\varphi}(t), \qquad k \in \{1, 2, 3\}.$$

Recimo, da je $\dot{\varphi}(t) > 0$ za vse $t \in [\alpha, \beta]$, potem

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{h}_1(t)^2 + \dot{h}_2(t)^2 + \dot{h}_3(t)^2}dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{g}_1\big(\varphi(t)\big)^2 + \dot{g}_2\big(\varphi(t)\big)^2 + \dot{g}_3\big(\varphi(t)\big)^2}\dot{\varphi}(t)dt.$$

S substitucijo $\tau = \varphi(t)$, dosežemo

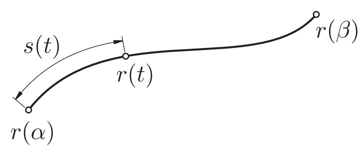
$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{h}_1(t)^2 + \dot{h}_2(t)^2 + \dot{h}_3(t)^2}dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{g}_1(\tau)^2 + \dot{g}_2(\tau)^2 + \dot{g}_3(\tau)^2}d\tau.$$

Če pa $\dot{\varphi}(t) < 0$ za vse $t \in [\alpha, \beta]$, dobimo $-$ pri korenjenju in še en $-$ pri obratu mej, torej isti rezultat.

Opomba: Če je

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_\alpha^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2 + \dot{z}(\tau)^2}d\tau \\ &= \int_\alpha^t |\dot{r}(\tau)|d\tau \end{aligned}$$

in $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ regularna parametrizacija, je $s(t)$ dolžina loka od točke $\big(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)\big)$ do točke $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$. To lahko izračunamo za vse t, $t \in [\alpha, \beta]$.



Slika 4.3: Dolžina krivulje od točke $r(\alpha)$ do točke $r(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Opomba: Seveda je

$$\dot{s}(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2},$$

saj $\frac{d}{dt} \int_\alpha^t \Phi(\tau) d\tau = \Phi(t)$, če Φ zvezna. Zgornje dostikat zapišemo

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

ali pa

$$(ds)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

kar imenujemo ***kvadrat ločnega elementa dolžine***.

Opomba: Ker je parametrizacija regularna, je $s : [\alpha, \beta] \to [0, \ell(\mathcal{L})]$ strogo naraščajoča funkcija razreda $\mathcal{C}^1$, saj za njen odvod velja $\dot{s}(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} > 0$. Potem obstaja inverzna funkcija $t : [0, \ell(\mathcal{L})] \to [\alpha, \beta]$, ki je spet razreda $\mathcal{C}^1$, saj je $\dot{s}(t) \neq 0$ za vse t. Krivuljo lahko tedaj reparametriziramo

$$\begin{aligned} r(t) &= \big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ &= \Big(x\big(t(s)\big), y\big(t(s)\big), z\big(t(s)\big)\Big). \end{aligned}$$

Parameter s je ***naravni parameter*** (meri dolžino loka). Pri tem je

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{ds} = \dot{r}\frac{1}{\dot{s}} = \frac{r}{|\dot{r}|},$$

torej

$$\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1, \qquad s \in [0, \ell(\mathcal{L})].$$

4.1.3 Tangenta na krivuljo

Naj bo $r(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, $t \in [\alpha, \beta]$ regularna parametrizacija loka $\mathcal{L}$. V točki $r(t_0) = (x_0, y_0, z_0) = \big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\big)$ je ***tangenta na krivuljo*** premica skozi točko (x_0, y_0, z_0) s smernim vektorjem $\dot{r}(t_0)$. (To je limitna lega sekante skozi točki $r(t_0 + h)$ in $r(t_0)$, ko $h \to 0$, slika 1.3)

Enačba tangente

$$R = r(t_0) + \lambda \dot{r}(t_0),$$

kjer $R = (X, Y, Z)$, $r(t_0) = \big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\big)$, $\dot{r}(t_0) = \big(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)\big)$ in $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.1.4 Normalna ravnina na krivuljo

Normalna ravnina na krivuljo v točki $r(t_0)$ je ravnina skozi $r(t_0)$, pravokotna na tangento v tej točki. Njen normalni vektor je torej $\dot{r}(t_0)$. Enačba ravnine je torej

$$\langle R - r(t_0), \dot{r}(t_0) \rangle = 0,$$

kjer $R = (X, Y, Z)$, $r(t_0) = \big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\big)$ in $\dot{r}(t_0) = \big(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)\big)$.

Zgled: Dana je vijačnica $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$. Določi enačbo tangente in normalne ravnine v točki $(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 \cdot \frac{1}{2}, \frac{\pi}{6})$.

Torej: $t_0 = \frac{\pi}{6}$, $r(t_0) = (\sqrt{3}, 1, \frac{\pi}{6})$, $\dot{r}(t_0) = (-2\sin t_0, 2\cos t_0, 1) = (-1, \sqrt{3}, 1)$.
Enačba tangente: $(X, Y, Z) = (\sqrt{3}, 1, \frac{\pi}{6}) + \lambda(-1, \sqrt{3}, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
Enačba normalne ravnine: $\big\langle (X, Y, Z) - (\sqrt{3}, 1, \frac{\pi}{6}), (-1, \sqrt{3}, 1) \big\rangle = 0$ $\Diamond$

4.1.5 Spremljajoči trieder (trirob) krivulje

Naj bo s naravni parameter in $r = r(s)$. S $'$ označimo odvod na naravni parameter s. Tedaj je $r'(s)$ vektor v smeri tangente na $\mathcal{L}$ v točki $r(s)$, ki je dolžine 1. Naj bo sedaj

$$\xi(s) := r'(s).$$

Predpostavimo sedaj, da je naša krivulja razreda $\mathcal{C}^2$ in si oglejmo kako se spreminja $\xi(s)$. Ker je vektor $\xi(s)$ enotski velja $\xi(s) \cdot \xi(s) \equiv 1$. Odvajamo po s, torej

$(\xi(s)\cdot\xi(s))' = \xi'(s)\cdot\xi(s) + \xi(s)\cdot\xi'(s) = 0$ in od tod $\xi'(s)\cdot\xi(s) = 0$. To pa pomeni, da ali (i) $\xi'(s) = 0$ ali pa (ii) $\xi'(s) \neq 0$ in $\xi'(s) \perp \xi(s)$. Oglejmo si drugi primer podrobneje;

Ogledamo si situacijo na kosih kjer $\xi'(s) \neq 0$. Tedaj lahko definiramo enotski vektor

$$\eta(s) := \frac{\xi'(s)}{|\xi'(s)|}.$$

Od prej vemo, da je $\eta(s)\cdot\xi(s) = 0$, torej $\eta(s) \perp \xi(s)$, t.j. pravokoten na tangento krivulje v točki $r(s)$. Pravimo, da je vektor $\eta(s)$ vektor v smeri ***glavne normale*** na krivuljo $\mathcal{L}$ v točki $r(s)$.

Opomba: Vektor $\eta(s)$ je odvisen le od točke v kateri ga računamo, nič pa od orientacije krivulje ali od tega, kje smo začeli meriti dolžino. (Pri $s \mapsto s_0 + s$ ni razlike v odvodu, pri $s \mapsto s_0 - s$ pa se pri dvakratnem odvodu izraz dvakrat pomnoži z -1.)

Definirajmo še vektor v smeri ***binormale***,

$$\zeta(s) := \xi(s) \times \eta(s),$$

t.j. vektor, ki je pravokoten na vektorja $\xi(s)$ in $\eta(s)$.

4.1.6 Pritisnjena ravnina

Naj bo $\xi'(s_0) \neq 0$ in $\mathcal{E}$ neka poljubna ravnina skozi točko $r(s_0)$ z enotsko normalo n. Enačba ravnine $\mathcal{E}$ je $\big(r(s) - r(s_0)\big)\cdot n = 0$. Razdalja med ravnino $\mathcal{E}$ in točko $r(s_0 + h)$ je

$$d\big(\mathcal{E}, r(s_0+h)\big) = \big(r(s_0+h) - r(s_0)\big)\cdot n.$$

Radi bi izbrali n tako, da bo pri majhnih h razdalja $d\big(\mathcal{E}, r(s_0+h)\big)$ čim manjša. Ker je

$$r(s_0+h) - r(s_0) = hr'(s_0) + \frac{h^2}{2}r''(s_0) + o(h^2)$$

je torej

$$\big(r(s_0+h) - r(s_0)\big)\cdot n = h(r'(s_0)\cdot n) + \frac{h^2}{2}(r''(s_0)\cdot n) + o(h^2).$$

Zgornji izraz bo najhitreje konvergiral proti 0 pri $h \to 0$, če

$$r'(s_0) \cdot n = 0, \qquad r''(s_0) \cdot n = 0,$$

t.j.

$$\xi(s_0) \cdot n = 0, \qquad \xi'(s_0) \cdot n = 0.$$

Torej je n hkrati pravokoten na $\xi(s_0)$ in $\xi'(s_0) = \eta(s_0)$, torej kolinearen vektorju $\xi(s_0) \times \eta(s_0) = \zeta(s_0)$. Krivulji v $r(s_0)$ najbolj prilega ravnina z enačbo

$$\zeta(s_0) \cdot \big(r(s) - r(s_0)\big) = 0.$$

Definicija 39 *Ravnina skozi točko $r(s_0)$ in z normalo $\zeta(s_0)$ se imenuje* ***pritisnjena ravnina*** *na krivuljo v točki $r(s_0)$. Njena enačba je*

$$\zeta(s_0) \cdot \big(r(s) - r(s_0)\big) = 0.$$

Oglejmo si to še v primeru, ko parameter ni naraven parameter. Spomnimo se: $s = \int_\alpha^t |\dot r(\tau)| d\tau$. Od tod $\frac{ds}{dt} = |\dot r(t)|$ oz. $\frac{d}{ds}t(s) = \frac{1}{\left|\dot r\left(t(s)\right)\right|}$. Torej

$$\begin{aligned}
\xi(s_0) &= \frac{dr}{ds}(s_0) \\
&= \dot r(t_0)\frac{1}{|\dot r(t_0)|} \\
&= \left.\frac{\dot r(t_0)}{|\dot r(t_0)|}\right|_{t=t_0}
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
\xi'(s_0) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot r(t_0)}{|\dot r(t_0)|}\right)\frac{dt}{ds} \\
&= \frac{\ddot r(t_0)|\dot r(t_0)| - \dot r(t_0)\frac{d}{dt}|\dot r(t_0)|}{|\dot r(t_0)|^2}\frac{1}{|\dot r(t_0)|}.
\end{aligned}$$

Vektor $\xi(s_0) \times \eta(s_0)$ je torej kolinearen vektorju

$$\frac{\dot r(t_0)}{|\dot r(t_0)|} \times \left(\frac{\ddot r(t_0)|\dot r(t_0)| - \dot r(t_0)\frac{d}{dt}|\dot r(t_0)|}{|\dot r(t_0)|^2}\frac{1}{|\dot r(t_0)|}\right) = \frac{\dot r(t_0) \times \ddot r(t_0)}{|\dot r(t_0)|^2},$$

t.j.

$$\frac{\dot r(t_0) \times \ddot r(t_0)}{|\dot r(t_0)|^2} \quad \| \quad \dot r(t_0) \times \ddot r(t_0),$$

torej je vektor binormale

$$\zeta(s_0) = \frac{\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)}{|\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)|}.$$

Enačba pritisnjene ravnine je tako

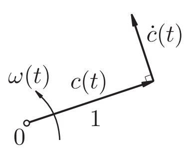
$$\big(R - r(t_0)\big) \cdot \big(\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)\big) = 0,$$

t.j.

$$[R - r(t_0), \dot{r}(t_0), \ddot{r}(t_0)] = 0.$$

4.1.7 Ukrivljenost krivulj

Pri ravninskih krivuljah je ukrivljenost kotna hitrost tangente, če po krivulji potujemo s hitrostjo 1. Naj bo $t \mapsto c(t)$ taka gladka vektorska funkcija, da je $|c(t)| \equiv 1$. Torej je $c(t) \cdot c(t) \equiv 1$ in od tod $\dot{c}(t) \cdot c(t) + c(t) \cdot \dot{c}(t) \equiv 0$, t.j. $\dot{c}(t) \cdot c(t) \equiv 0$. Če je $\dot{c}(t) \neq 0$, je $\dot{c}(t) \perp c(t)$. Vemo: kotna hitrost = obodna hitrost / polmer, torej $\frac{|\dot{c}(t)|}{1} = |\dot{c}(t)|$.



Slika 4.4: Ukrivljenost je kotna hitrost tangente.

Torej je za splošno gladko vektorsko funkcijo $t \mapsto g(t)$ skalarna kotna hitrost (okoli 0) enaka

$$
\begin{aligned}
\omega(t) &= \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{g(t)}{|g(t)|}\right)\right| \\
&\overset{(*)}{=} \left|\frac{|g(t)|\dot{g}(t) - \frac{\dot{g}(t)g(t)}{|g(t)|}g(t)}{|g(t)|^2}\right| \\
&= \left|\frac{|g(t)|^2\dot{g}(t) - \big(g(t)\cdot\dot{g}(t)\big)g(t)}{|g(t)|^3}\right| \\
&= \sqrt{\frac{\Big(|g(t)|^2\dot{g}(t) - \big(g(t)\cdot\dot{g}(t)\big)g(t)\Big)\cdot\Big(|g(t)|^2\dot{g}(t) - \big(g(t)\cdot\dot{g}(t)\big)g(t)\Big)}{|g(t)|^6}} \\
&= \sqrt{\frac{|g(t)|^4|\dot{g}(t)|^2 - \big(g(t)\cdot\dot{g}(t)\big)^2|g(t)|^2}{|g(t)|^6}} \\
&= \sqrt{\frac{|g(t)|^2|\dot{g}(t)|^2 - \big(g(t)\cdot\dot{g}(t)\big)^2}{|g(t)|^4}}.
\end{aligned}
$$

$(*)$ upoštevamo

$$c(t) = \frac{g(t)}{|g(t)|}$$

in

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|g(t)| &= \frac{d}{dt}\sqrt{g(t)\cdot g(t)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{g(t)\cdot g(t)}}\frac{d}{dt}\big(g(t)\cdot g(t)\big) \\
&= \frac{g(t)\cdot\dot{g}(t)}{|g(t)|}.
\end{aligned}
$$

Spomnimo se $(A\times B)\cdot(C\times D) = (A\cdot C)(B\cdot D) - (A\cdot D)(B\cdot C)$ torej $\big(g(t)\times\dot{g}(t)\big)\cdot\big(g(t)\times\dot{g}(t)\big) = |g(t)|^2|\dot{g}(t)|^2 - \big(g(t)\cdot\dot{g}(t)\big)^2$ in zato

$$\omega = \frac{|g(t)\times\dot{g}(t)|}{|g(t)|^2}.$$

Definicija 40 ***Vektorska kotna hitrost*** *vektorske funkcije* $t\mapsto g(t)$ *okoli* 0 *je*

$$\omega(t) = \frac{|g(t)\times\dot{g}(t)|}{|g(t)|^2}.$$

Skalarna kotna hitrost *pa je*

$$\omega(t) = |\omega(t)|.$$

Pri ravninskih krivuljah definiramo ukrivljenost kot skalarno kotno hitrost smeri tangente, torej kot

$$\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|}\right)\right| = \left|\frac{\dot{r}(t)\times\ddot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|^2}\right|,$$

krivinski polmer pa kot polmer R tistega kroga, da bo obodna hitrost pri tej kotni hitrosti enaka 1, t.j. $\omega(t)\cdot R(t) = 1$, torej

$$R(t) = \frac{1}{\omega(t)}.$$

Definicija 41 ***Fleksijska ukrivljenost*** *ali upognjenost K krivulje $\mathcal{L}$ z enačbo $r = r(t)$ v točki $r(t_0)$ je skalarna kotna hitrost enotskega vektorja v smeri tangente, če potujemo po $\mathcal{L}$ s hitrostjo 1, t.j. $|\xi'(s)|$*

$$K(s) = |\xi'(s)|.$$

Vektorska kotna hitrost pa je tedaj $\xi\times\xi' = \xi\times K\eta = K\zeta$.

Trditev 12 *$\zeta \equiv konst. \leftrightarrow \mathcal{L}$ je ravninska krivulja.*

Dokaz: Naj bo $\zeta \equiv c$ in s naravni parameter. Tedaj $(r\cdot c)' = r'\cdot c + r\cdot 0 = r'\cdot c = \xi\cdot c = \xi\cdot\zeta = 0$ in od tod $r\cdot c = b$, b fiksen skalar, kar pa pomeni, da r leži ve čas v isti ravnini $(r - r_0)\cdot c = 0$. □

Oglejmo si še vektorsko kotno hitrost za ζ,

$$\begin{aligned}\omega &= \zeta\times\zeta' \\ &= (\xi\times\eta)\times(\xi'\times\eta + \xi\times\eta') \\ &\overset{(*)}{=} (\xi\times\eta)\times(\xi\times\eta') \\ &= \zeta\times(\xi\times\eta') \\ &= (\zeta\cdot\eta')\xi - (\zeta\cdot\xi)\eta' \\ &\overset{(**)}{=} (\zeta\cdot\eta')\xi,\end{aligned}$$

$(*)$ $\eta = \xi'/|\xi'|$, $\xi' = K\eta$ in zato $\xi'\times\eta = 0$,

$(**)$ $\zeta\perp\xi$ in zato $\zeta\cdot\xi = 0$.

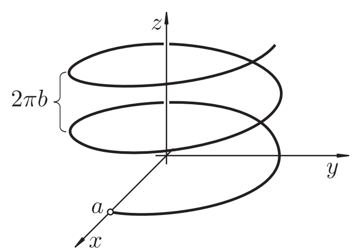
Definicija 42 ***Torzijska ukrivljenost*** *ali zvitost krivulje $\mathcal{L}$ v točki $r(s)$ je*

$$\omega(s) = \zeta(s) \cdot \eta'(s).$$

Opomba: To je „predznačena" skalarna kotna hitrost binormale ζ, če po $\mathcal{L}$ potujemo s hitrostjo 1. Če je $\zeta \cdot \eta' > 0$, se ζ vrti okoli ξ v pozitivno smer, sicer pa v negativni.

Opomba: K in ω sta geometrijski količini, odvisni samo od točke na krivulji (tiru), nič pa od parametrizacije.

Zgled: Naj bo $r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a, b > 0$, t.j. vijačnica.



Slika 4.5: Vijačnica.

Uvedemo naravni parameter

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{\dot{r}(\tau)\cdot\dot{r}(\tau)}d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{\dot{x}(\tau)+\dot{y}(\tau)+\dot{z}(\tau)}d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2\tau + a^2\cos^2\tau + b^2}d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}d\tau \\ &= ct. \end{aligned}$$

Torej $s = ct$ oz. $t = \frac{s}{c}$. Reparametriziramo $r = (a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c})$. Torej

$$\begin{aligned} \xi(s) &= r'(s) \\ &= \tfrac{1}{c}(-a\sin\tfrac{s}{c}, a\cos\tfrac{s}{c}, b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi'(s) &= \tfrac{1}{c}(-a\sin\tfrac{s}{c}, a\cos\tfrac{s}{c}, b) \\
&= \tfrac{1}{c}(-\tfrac{a}{c}\cos\tfrac{s}{c}, -\tfrac{a}{c}\sin\tfrac{s}{c}, 0) \\
&= -\tfrac{a}{c^2}(\cos\tfrac{s}{c}, \sin\tfrac{s}{c}, 0)
\end{aligned}$$

$$\xi'(s) = K(s)\eta(s)$$

$$\begin{aligned}
K(s) &= |\xi'(s)| \\
&= \frac{a}{c^2}
\end{aligned}$$

$$\eta(s) = (-\cos\tfrac{s}{c}, -\sin\tfrac{s}{c}, 0)$$

$$\eta'(s) = \tfrac{1}{c}(\sin\tfrac{s}{c}, -\cos\tfrac{s}{c}, 0)$$

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \xi(s)\times\eta(s) \\
&= \tfrac{1}{c}(b\sin\tfrac{s}{c}, -b\cos\tfrac{s}{c}, a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(s) &= \zeta(s)\cdot\eta'(s) \\
&= \frac{b}{c^2}
\end{aligned}$$

◊

Izrek 33 *naj bo $\mathcal{L}$ krivulja razreda $\mathcal{C}^3$, parametrizirana z naravnim parametrom. V vsaki točki, kjer $\xi' \neq 0$, veljajo t.i.* ***Frenetove formule***

$$\begin{aligned}
\xi' &= K\eta \\
\eta' &= -K\xi + \omega\zeta \\
\zeta' &= -\omega\eta.
\end{aligned}$$

Pri tem je

$$\begin{aligned}
K(s) &= |r''(s)| \\
&= \frac{|\dot r(s)\times\ddot r(s)|}{|\dot r(s)|^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(s) &= \frac{[r'(s), r''(s), r'''(s)]}{|r''(s)|^2} \\
&= \frac{[\dot r(s), \ddot r(s), \dddot r(s)]}{|\dot r(s)\times\ddot r(s)|^2}
\end{aligned}$$

Opomba: Frenetove formule v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}.$$

4.2 Ploskve v prostoru

Ogledali si bomo gladke ploskve v prostoru.

4.2.1 Podajanje ploskev

Eksplicitna oblika

Eksplicitno podana ploskev je ploskev, zapisana kot graf funkcije. Naj bo $\mathcal{D}$ območje (odprta in povezana množica) v ravnini. Naj bo f neka gladka funkcija na območju $\mathcal{D}$. Tedaj je graf funkcije f, t.j. množica

$$\mathcal{S} = \{\big(x, y, f(x, y)\big) : (x, y) \in \mathcal{D}\}$$

neka ploskev v prostoru, slika 1.5. Pravimo, da je taka ploskev dana eksplicitno.

Opomba: Podobno; če je $\mathcal{D}_1$ območje v yz-ravnini in $x = g(y, z)$, je $\mathcal{S}_1 = \{\big(g(y, z), y, z\big) : (y, z) \in \mathcal{D}_1\}$ oziroma, če je $\mathcal{D}_2$ območje v xz-ravnini in $y = h(x, z)$, je $\mathcal{S}_2 = \{\big(x, h(x, z), z\big) : (y, z) \in \mathcal{D}_2\}$.

Zgled: Naj bo $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$. Graf je zgornja polsfera nad $\mathcal{D}$. Vse te točke ležijo na sferi s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom 2. $\Diamond$

Implicitna oblika

Naj bo $\mathcal{G}$ območje v prostoru in naj bo $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ gladka funkcija na $\mathcal{D}$. Naj bo $\mathcal{M} = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$, t.j. množica ničel in naj za vsak $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{M}$ velja še $\big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\big) \neq 0$. Tedaj lahko v okolici vsake take točke izrazimo košček ploskve $\mathcal{M}$ v eksplicitni obliki.

Vemo, če je npr. $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ (in $f(x_0, y_0, z_0) = 0$), tedaj lahko v okolici točke (x_0, y_0, z_0) enačbo $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ razrešimo na z, t.j. $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ blizu (x_0, y_0, z_0) pomeni isto kot $z = \varphi(x, y)$ za neko gladko funkcijo φ, definirano v okolici točke (x_0, y_0). V tem primeru je $\mathcal{M}$ gladka ploskev, ki je dana implicitno.

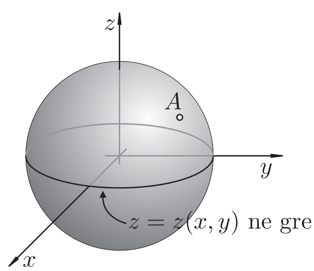
Zgled: Naj bo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Torej je

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$$

sfera s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom 2. Tedaj je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

in zato $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (2x, 2y, 2z) \neq 0$ povsod na $\mathcal{M}$ (0 le v točki $(0, 0, 0) \notin \mathcal{M}$).



Slika 4.6: Sfera.

V točki A lahko ploskev lokalno zapišemo kot $z = z(x, y)$, $x = x(y, z)$ in $y = y(x, z)$. ♢

Parametrična oblika

Začnimo s primerom: Fiksirajmo R_0 in si oglejmo točke v prosoru, za katere je $x = R_0 \cos\vartheta \cos\varphi$, $y = R_0 \cos\vartheta \sin\varphi$, $z = R_0 \sin\vartheta$, kjer je $0 \leq \varphi < 2\pi$ in $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$. Ko (φ, ϑ) preteče $[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, tedaj (x, y, z) preteče sfero. Pravimo, da je sfera podana parametrično. Parametra sta φ, ϑ. V primeru, ko je sfera zemljino površje, sta to zemljepisna dolžina in zemljepisna širina.

Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica in $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^3$ preslikava, $F \in \mathcal{C}^1$, t.j.

$$F(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big).$$

Vemo: če je za nek $(u_0, v_0) \in \mathcal{D}$

$$\operatorname{rang}(dF)(u_0, v_0) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} (u_0, v_0) = 2,$$

torej maksimalen, je tedaj za neko okolico $\mathcal{U}$ točke (u_0, v_0),

$$F(\mathcal{U}) = \{\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) : (u,v) \in \mathcal{U}\}$$

gladka ploskev v prostoru. Res, če je npr.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

tedaj vemo, da sistem $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ lahko razrešimo na u in v kot funkciji spremenljivk x in y v okolici točke $(x_0, y_0) = \big(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)\big)$. Torej $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ je isto kot $u = \varphi(x,y)$ in $v = \psi(x,y)$. Od tod sledi $z = z(u,v) = z\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big) = g(x,y)$. Torej je množica $\{\big(x(u,v), y(u,v)\big) : (u,v) \in \mathcal{U}\}$ res koščček gladke ploskve. To velja lokalno. Globalno velja tako, kot pri krivuljah.

Naj bo $\mathcal{D}$ omejeno območje v uv-ravnini in naj bo $F : \overline{\mathcal{D}} \to^R R^3$ injektivna preslikava razreda $\mathcal{C}^1(\mathcal{D})$, za katero je $\operatorname{rang}(dF)(u,v) \equiv 2$, t.j. maksimalen za $(u,v) \in \mathcal{D}$. Tedaj je

$$\mathcal{S} = F(\mathcal{D}) = \{F(u,v) : (u,v) \in \mathcal{D}\}$$

ploskev v prostoru, ki je podana parametrično. Preslikava F se imenuje regularna parametrizacija ploskve $\mathcal{S}$. Pišemo tudi $r = F(u,v)$ ali $r = r(u,v)$. u in v imenujemo krivočrtni koordinati na ploskvi (u in v sta parametra). Običajno predpostavimo, da je parametrizacija regularna.

Zgled: Podana je sfera v parametrični obliki:

$$x = R_0 \cos\vartheta \cos\varphi$$

$$y = R_0 \cos\vartheta \sin\varphi$$

$$z = R_0 \sin\vartheta,$$

kjer

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$
$$-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Regularna parametrizacija sfere je

$$F : (\vartheta, \varphi) \mapsto (R_0 \cos\vartheta \cos\varphi, R_0 \cos\vartheta \sin\varphi, R_0 \sin\vartheta).$$

$\diamondsuit$

4.3 Koordinatne krivulje

Koordinatne krivulje ba parametrično podani ploskvi $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \mathcal{D}$ so krivulje $u \equiv konst.$ ali $v \equiv konst.$, torej krivulje

$$v \mapsto r(u, v) \quad \text{za } u \text{ fiksen}$$
$$u \mapsto r(u, v) \quad \text{za } v \text{ fiksen.}$$

Na običajno dani sferi so to vzporedniki in poldnevniki.

Naj bo $r = r(u, v)$ regularna parametrizacija ploskve $\mathcal{S}$, $(u, v) \in \mathcal{D}$. Naj bo $T_0 = (x_0, y_0, z_0) = r(u_0, v_0)$ točka na $\mathcal{S}$. Koordinatni krivulji skozi to točko sta

$$t \mapsto r(u_0, t) = \big(x(u_0, t), y(u_0, t), z(u_0, t)\big)$$
$$t \mapsto r(t, v_0) = \big(x(t, v_0), y(t, v_0), z(t, v_0)\big).$$

4.4 Tangentna ravnina, normala na ploskev

Tangentna vektorja v točki T_0 sta

$$\left[\frac{d}{dt} r(u_0, t)\right]_{t=v_0} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$$
$$\left[\frac{d}{dt} r(t, v_0)\right]_{t=u_0} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\right).$$

Pogoj, da je $\operatorname{rang}(dF)(u_0, v_0) = 2$, pomeni, da je rang matrike

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix} = 2,$$

torej sta vrstici linearno neodvisni. Torej tangetna vektorja sta oba $\neq 0$ in razpenjata ravnino. To pa je ravno tangentni prostor $\mathcal{S}$ v točki T. Označili ga bomo s $T_T(\mathcal{S})$. Tangentna ravnina na $\mathcal{S}$ v T pa je ravnina skozi T, ki je vzporedna $T_T(\mathcal{S})$.

Normalni vektor tangentne ravnine v točki $T_0 = (x_0, y_0, z_0) = r(u_0, v_0)$ je $n = r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)$, kjer je $r_u = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})$ in $r_u = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$.

Enačba tangentne ravnine na $\mathcal{S}$ skozi T_0 je

$$[R - R_0, r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)] = 0,$$

kjer je R poljubna točka na tangentni ravnini. To sledi iz $(R - R_0) \cdot n = 0$.

Enačba normale na $\mathcal{S}$ skozi točko T_0, t.j. premico skozi T_0, ki je pravokotna na tangentno ravnino na $\mathcal{S}$ skozi T_0, je

$$R = R_0 + \lambda\big(r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)\big), \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Naj bo $\mathcal{S}$ dana eksplicitno, torej npr. $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. prepišemo v parametrično obliko tako, da sta parametra kar x in y. Torej $x = x$, $y = y$ in $z = z(x, y)$. V točki $T_0 = \big(x_0, y_0, z_0(x_0, y_0)\big)$ je

$$r_x(x_0, y_0) = \Big(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\Big)$$
$$r_y(x_0, y_0) = \Big(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\Big).$$

Torej je

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = (-p, -q, 1),$$

kjer smo označili $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ in $\frac{\partial z}{\partial y} = q$.

Torej je enačba tangentne ravnine

$$(R - R_0) \cdot (p, q, -1) = 0$$

in enačba normale

$$R = R_0 + \lambda(p, q, -1).$$

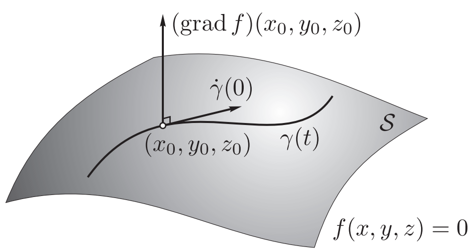
Kako pa bi izračunali tangentno ravnino, če je ploskev $\mathcal{S}$ podana implicitno, torej $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \subset \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$. Naj bo $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$, vsaj en parcialen odvod funkcije f v točki (x_0, y_0, z_0) različen od 0 in naj bo γ, $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ neka $\mathcal{C}^1$ pot na ploskvi $\mathcal{S}$ tako, da je $\gamma_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$.

$$f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \text{leži na ploskvi } \mathcal{S}.$$

Odvajamo po parametru t in vstavimo $t = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\dot{x}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\dot{y}(0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\dot{z}(0) = 0,$$

torej $(\operatorname{grad} f)(x_0, y_0, z_0) \cdot \dot{\gamma}(0) = 0$, kjer smo z $\dot{\gamma}(0) = \big(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)\big)$ tangentni vektor poti γ pri vrednosti parametra $t = 0$. Vidimo, da je gradient funkcije f pravokoten na tangentni vektor poti γ na ploskvi $\mathcal{S}$, ki gre pri vrednosti parametra $t = 0$ skozi točko (x_0, y_0, z_0).



Slika 4.7: Pot γ na ploskvi $\mathcal{S}$.

Smeri $\dot{\gamma}(0)$ za vse take poti γ opišejo vso tangento ravnino v tej točki. Gradient je torej normalni vektor ploskve $\mathcal{S}$ v točki (x_0, y_0, z_0).

Enačba tangentne ravnine je tako

$$(R - R_0) \cdot (\operatorname{grad} f)(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

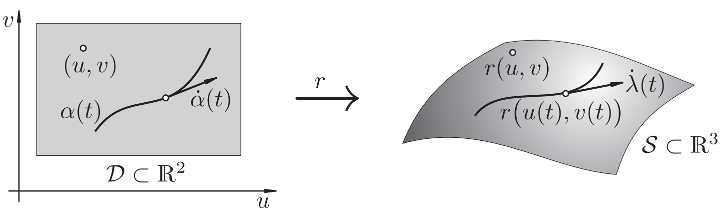
kjer je $R = (X, Y, Z)$ točka na tangentni ravnini, enačba normale na tangentno ravnino pa

$$R = R_0 + \lambda(\operatorname{grad} f)(x_0, y_0, z_0).$$

4.5 Merjenje na ploskvi

4.6 Dolžine krivulj na ploskvi

Naj bo α, $\alpha(t) = \big(u(t), v(t)\big)$, pot v $\mathcal{D}$, $t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ in naj bo r regularna parametrizacija, $r\big(u(t), v(t)\big) = r\big(\alpha(t)\big) =: \lambda(t)$.



Slika 4.8: Regularna parametrizacija poti α.

Obratno: vsaka pot λ, $\lambda(t) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, je take oblike, da je $\alpha(t) = r^{-1}\big(\lambda(t)\big) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Pišimo: $\lambda(t) = r\big(u(t), v(t)\big) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, kjer je $t \in \mathcal{I} = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Dolžina poti λ je:

$$\begin{aligned} \ell(\lambda) &= \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t) + \dot{y}(t) + \dot{z}(t)}dt \\ &= \int_a^b |\dot{\lambda}(t)|dt \end{aligned}$$

V našem primeru je

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\partial r}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big)\dot{u}(t) + \frac{\partial r}{\partial v}\big(u(t), v(t)\big)\dot{v}(t)$$

in

$$\begin{aligned} |\dot{\lambda}(t)|^2 &= (r_u\dot{u} + r_v\dot{v}) \cdot (r_u\dot{u} + r_v\dot{v}) \\ &= (r_u \cdot r_u)\dot{u}^2 + 2(r_u \cdot r_v)\dot{u}\dot{v} + (r_v \cdot r_v)\dot{v}^2. \end{aligned}$$

Standardne oznake:

$$E(u, v) = r_u \cdot r_u = |r_u|^2$$

$$F(u, v) = r_u \cdot r_v$$

$$G(u, v) = r_v \cdot r_v = |r_v|^2$$

Funkcije E, F, G so odvisne le od parametrizacije in nič od poti. Torej

$$\ell(\lambda) = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + F\dot{v}^2}dt.$$

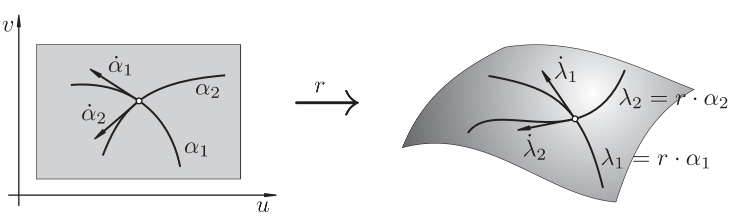
Definicija 43 *Kvadratična forma*

$$\dot{\alpha} = (\dot{u}, \dot{v}) \mapsto E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + F\dot{v}^2 = |\dot{\lambda}(t)|^2$$

se imenuje ***prva fundamentalna forma ploskve****. Matrika prve fundamentalne forme je*

$$H = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

Naj bo $\dot{\alpha} = (\dot{u}, \dot{v})$. Tedaj je $(H\dot{\alpha}) \cdot \dot{\alpha}$ prva fundamentalna forma ploskve. Tej formi pripada bilinearna forma z isto matriko.



Slika 4.9: ???.

Torej

$$(H\dot{\alpha}_1) \cdot \dot{\alpha}_2 = \dot{\lambda}_1 \cdot \dot{\lambda}_2;$$

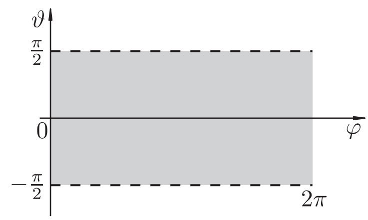
pri tem pomeni operacija $\cdot$ na levi skalarni produkt v $\mathbb{R}^2$, na desni pa skalarni produkt v $\mathbb{R}^3$. Poglejmo si še

$$\begin{aligned} \cos\left(\sphericalangle(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)\right) &= \frac{\dot{\lambda}_1 \cdot \dot{\lambda}_2}{|\dot{\lambda}_1|\ |\dot{\lambda}_2|} \\ &= \frac{(H\dot{\alpha}_1) \cdot \dot{\alpha}_2}{\sqrt{(H\dot{\alpha}_1) \cdot \dot{\alpha}_1}\sqrt{(H\dot{\alpha}_2) \cdot \dot{\alpha}_2}}. \end{aligned}$$

Zgled: Sfera $\mathcal{S} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Parametrizacija r,

$$r(\varphi, \vartheta) = (\cos\vartheta \cos\varphi, \cos\vartheta, \sin\varphi, \sin\vartheta)$$

je regularna na območju, kjer je $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$.



Slika 4.10: Na zgornjem in spodnjem robu parametrizacija ni regularna.

Tako je

$$r_\varphi = (-\cos\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta\cos\varphi, 0)$$

$$r_\vartheta = (-\sin\vartheta\cos\varphi, -\sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$$

in

$$E = r_\varphi \cdot r_\varphi = \cos^2\vartheta$$

$$F = r_\varphi \cdot r_\vartheta = 0$$

$$G = r_\vartheta \cdot r_\vartheta = 1.$$

Prva fundamentalna forma na sferi je

$$E\dot{\varphi}^2 + 2F\dot{\varphi}\dot{\vartheta} + G\dot{\vartheta}^2 = \cos^2\vartheta\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2.$$

Zgornje zapisano z diferenciali (v splošnem)

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

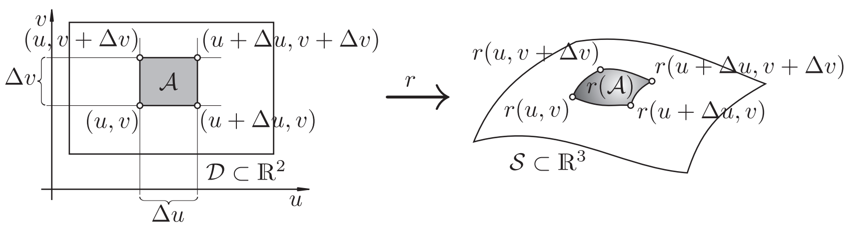
in na sferi

$$ds^2 = \cos^2\vartheta(d\varphi)^2 + (d\vartheta)^2.$$

$\diamondsuit$

4.6.1 Površina ploskve

Naj bo $r = r(u, v)$ regularna parametrizacija ploskve $\mathcal{S}$.



Slika 4.11: Površina ploskve.

V območju $\mathcal{D}$ vzamemo pravokotnik $\mathcal{A}$ z oglišči (u,v), $(u+\Delta u)$, $(u, v+\Delta)$ in $(u+\Delta, v+\Delta)$. Pravokotnik $\mathcal{A}$ se preslika v „krivočrtni" paralelogram $r(\mathcal{A})$ na ploskvi $\mathcal{S}$. Stranice tega paralelograma so torej:

$$r(u+\Delta u, v) - r(u,v) \approx r_u(u,v)\Delta u$$
$$r(u, v+\Delta v) - r(u,v) \approx r_v(u,v)\Delta v.$$

Površina krivočrtnega paralelograma $r(\mathcal{A})$ je približno enaka

$$\begin{aligned} P\big(r(\mathcal{A})\big) &\approx |r_u \Delta u \times r_v \Delta v| \\ &= |r_u \times r_v| \underbrace{\Delta u \Delta v}_{pl(\mathcal{A})}. \end{aligned}$$

Pišemo

$$\begin{aligned} |r_u \times r_v|^2 &= (r_u \times r_v)\cdot(r_u \times r_v) \\ &= (r_u \cdot r_u)(r_v \cdot r_v) - (r_u \cdot r_v)^2 \\ &= EG - F^2 \\ &= \det H, \end{aligned}$$

kjer je H matrika prve fundamentalne forme.

Površina celotnega območja $r(\mathcal{D}) = \mathcal{S}$ je približno enaka

$$P(\mathcal{S}) \approx \sum_{i=1}^{n} P\big(r(\mathcal{A}_i)\big),$$

kjer so $\mathcal{A}_i$ pravokotniki iz območja $\mathcal{D}$ tako, da $\cup_{i=1}^{n}\mathcal{A}_i = \mathcal{D}$. Torej

$$P(\mathcal{S}) \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{EG-F^2}\Big|_{(u_i,v_i)} pl(\mathcal{A}_i),$$

kjer $(u_i, v_i) \in \mathcal{A}_i$. Zgornje je ravno Riemannova vsota. V limiti dobimo

$$P(\mathcal{S}) = \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Opomba: Zgornji integral za $P(\mathcal{S})$ je neodvisen od izbire parametrizacije. Odvisen je le od izbire ploskve. Vzemimo npr. dve paraetrizaciji

$$\mathcal{S} = f(\mathcal{D}), \quad (u, v) \in \mathcal{D}$$
$$\mathcal{S} = g(\Delta), \quad (\sigma, \tau) \in \Delta.$$

Naj bosta f in g regularni parametrizaciji ploskve $\mathcal{S}$. Od tod sledi, da obstaja difeomorfizem $h : \Delta \to \mathcal{D}$ tako, da je $g = f \circ h$ oziroma $h = f^{-1} \circ g$. Dobimo

$$g_\sigma = f_u u_\sigma + f_v v_\sigma$$
$$g_\tau = f_u u_\tau + f_v v_\tau$$

in

$$\begin{aligned} g_\sigma \times g_\tau &= (f_u u_\sigma + f_v v_\sigma) \times (f_u u_\tau + f_v v_\tau) \\ &= (f_u \times f_v)(u_\sigma v_\tau - v_\sigma u_\tau). \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$|g_\sigma \times g_\tau| = |f_u \times f_v| \, |\underbrace{\begin{vmatrix} u_\sigma & u_\tau \\ v_\sigma & v_\tau \end{vmatrix}}_{\det Jh}|$$

Po formuli za substitucijo velja:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathcal{D}} |g_\sigma \times g_\tau| d\sigma d\tau &= \iint\limits_{\Delta} |f_u \times f_v| \, |\det Jh| d\sigma d\tau \\ &= \iint\limits_{\mathcal{D}} |f_u \times f_v| dudv. \end{aligned}$$

Zgled: Izračunajmo površino krogle. Regularna parametrizacija

$$r(\varphi, \vartheta) = (a \cos\varphi \cos\vartheta, a \sin\varphi \cos\vartheta, a \sin\varphi)$$
$$\varphi \in [0, 2\pi), \quad \vartheta[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Torej

$$
\begin{aligned}
E &= r_\varphi \cdot r_\varphi = a^2 \cos^2 \vartheta \\
F &= r_\varphi \cdot r_\vartheta = 0 \\
G &= r_\vartheta \cdot r_\vartheta = a^2,
\end{aligned}
$$

in

$$
\begin{aligned}
P &= \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^4 \cos^2 \vartheta} d\vartheta \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos \vartheta d\vartheta \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} [\sin \vartheta]_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} d\varphi \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} 2 d\varphi \\
&= 4\pi a^2.
\end{aligned}
$$

$(*)$ ker je $\vartheta[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. ◊

Zgled: Ploskev je podana eksplicitno: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}$. Spremenljivki x in y sta parametra,

$$
\begin{aligned}
x &= x \\
y &= y \\
z &= f(x, y),
\end{aligned}
$$

torej $r(x, y) = \big(x, y, f(x, y)\big)$.

$$
\begin{aligned}
r_x &= (1, 0, f_x) \\
r_y &= (0, 1, f_y),
\end{aligned}
$$

$$E = r_x \cdot r_x = 1 + (f_x)^2$$
$$F = r_x \cdot r_y = f_x f_y$$
$$G = r_y \cdot r_y = 1 + (f_y)^2$$

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \big(1 + (f_x)^2\big)\big(1 + (f_y)^2\big) - f_x f_y \\ &= 1 + (f_x)^2 + (f_y)^2 \end{aligned}$$

in končno

$$P = \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dxdy.$$

$\Diamond$

Poglavje 5

Vektorska analiza

5.1 Vektorske diferencialne operacije

Naj bodo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazni vektorji v $\mathbb{R}^3$. Za ortonormirano bazo $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ velja:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

in

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Pravimo, da je (urejena) ortonormirana baza $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ pozitivno orientirana, če je

$$\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$$

in negativno orientirana, če je

$$\vec{k} = -\vec{i} \times \vec{j}.$$

Za poljubno bazo $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ v $\mathbb{R}^3$ pravimo, da je pozitivno (negativno) orientirana natanko tedaj ko je $[\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}] > 0$ ($[\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}] < 0$), t.j. če je mešani produkt $[\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}]$ pozitiven (negativen).

Definicija 44 *Naj bo $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^3$ odprta množica. Zvezno funkcijo $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ imenujemo **skalarno polje**, zvezno preslikavo $\vec{F} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ pa imenujemo **vektorsko polje**.*

Opomba: Primer skalarnega polja je porazdelitev temperature v telesu, primer vektorskega polja pa je polje hitrosti gibanja delčkov tekočine v določenem trenutku.

5.1.1 Izražanje polj v bazi

Naj bo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ neka ortonormirana baza v $\mathbb{R}^3$. Skalarno polje f je tedaj funkcija treh spremenljivk x_1, x_2, x_3, torej

$$f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3).$$

Opomba: Jasno je, da je funkcija φ odvisna od izbire baze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Za vektorsko polje $\vec{F}$ dobimo

$$\begin{aligned}\vec{F}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) &= F_1(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3)\vec{e}_1 + \\ &+ F_2(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3)\vec{e}_2 + \\ &+ F_3(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3)\vec{e}_3 \\ &= \big(\varphi_1(x_1, x_2, x_3), \varphi_2(x_1, x_2, x_3), \varphi_3(x_1, x_2, x_3)\big)\end{aligned}$$

Opomba: Jasno je, da so funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ odvisne od izbire baze $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$.

5.1.2 Nivojske ploskve skalarnega polja

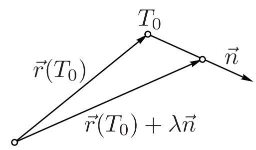
Nivojske ploskve skalarnega polja so ploskve na katerih ima skalarno polje konstantno vrednost. Pravimo jim tudi ***ekvipotencialne ploskve***, t.j.

$$\mathcal{M}_c = \{T \in \mathcal{U} : f(T) = c\},$$

kjer je c neka konstanta. Množica $\mathcal{M}_c$ je „prava ploskev" (dvodimenzionalna mnogoterost), če je $(Df)(T) \neq 0$ za vsako točko $T \in \mathcal{M}_c$.

5.1.3 Odvod skalarnega polja v dani smeri

Naj bo $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ gladko skalarno polje, $T_0 \in \mathcal{U}$ in $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ enotski vektor.



Slika 5.1: Odvod skalarnega polja v smeri vektorja $\vec{n}$.

Odvod polja f v točki T_0 v smeri vektorja $\vec{n}$ je

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\vec{r}(T_0) + \lambda\vec{n}) - f\big(\vec{r}(T_0)\big)}{\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\Big[f\big(\vec{r}(T_0) + \lambda\vec{n}\big)\Big]_{\lambda=0}$$

in ga označimo z

$$\frac{df}{d\vec{n}}(T_0).$$

Če $df/d\vec{n}(T_0)$ izračunamo v kartezijevih koordinatah, $\vec{r}(T_0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, dobimo

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\vec{n}}(T_0) &= \frac{d}{d\lambda}\big(f(x_0 + \lambda n_x, y_0 + \lambda n_y, z_0 + \lambda n_z)\big)\big|_{\lambda=0}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(T_0)n_x + \frac{\partial f}{\partial y}(T_0)n_y + \frac{\partial f}{\partial z}(T_0)n_z.\end{aligned}$$

Opazimo, da velja

$$\frac{df}{d\vec{n}}(T_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(T_0), \frac{\partial f}{\partial y}(T_0), \frac{\partial f}{\partial z}(T_0)\right) \cdot \vec{n}.$$

Vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(T_0), \frac{\partial f}{\partial y}(T_0), \frac{\partial f}{\partial z}(T_0)\right)$ imenujemo ***gradient skalarnega polja*** f v točki T_0 in pišemo

$$(\operatorname{grad} f)(T_0).$$

Opomba: Gradient torej naredi iz skalarnega polja f vektorsko polje $\operatorname{grad} f$.

Smerni odvod je torej

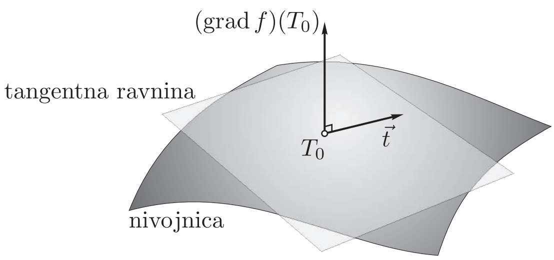
$$\frac{df}{d\vec{n}}(T_0) = (\operatorname{grad} f)(T_0) \cdot \vec{n}.$$

Opomba: Iz te formule se jasno vidi, da je smerni odvod največji v smeri gradienta.

Opomba: Parcialni odovodi funkcije f so primeri smernih odvodov

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\vec{e}_1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{d\vec{e}_2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{d\vec{e}_3}.$$

Iz poglavja o ploskvah vemo: če je $(\operatorname{grad} f)(T_0) \neq \vec{0}$, tedaj je $(\operatorname{grad} f)(T_0)$ pravokoten na nivojsko ploskev skozi točko T_0, $\{T \in \mathcal{U} : f(T) = f(T_0)\}$. Torej je naraščanje f največje v smeri pravokotno na ploskev. Z drugimi besedami, če je $(\operatorname{grad} f)(T_0) \neq \vec{0}$, potem enačba $(\operatorname{grad} f)(T_0) \cdot \vec{t} = 0$ določa tangentno ravnino skozi T_0 v $\mathbb{R}^3$, slika 5.2.



Slika 5.2: Naraščanje f je največje v smeri pravokotno na ploskev

Opomba: Vidimo, da je $(\operatorname{grad} f)(T_0)$ tisti vektor, za katerega velja

$$(Df)(T_0) \cdot \vec{n} = (\operatorname{grad} f)(T_0) \cdot \vec{n}.$$

Definicija 45 ***Operator nabla*** ∇ *je diferencialni operator, ki ima glede na kanonično bazo* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *prostora* $\mathbb{R}^3$ *obliko*

$$\begin{aligned} \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Opomba: Iz zgornjega sledi $\operatorname{grad} f = \nabla f$.

S pomočjo operatorja ∇ definiramo še dve operaciji na vektorskih poljih.

5.1.4 Divergenca vektorskega polja

Naj bo $\vec{F} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ gladko vektorsko polje in pišimo

$$\vec{F}(x, y, z) = \big(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\big).$$

Divergenca vektorskega polja $\vec{F}$ v točki $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ je skalar $(\operatorname{div} \vec{F})(T_0)$, podan kot

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} \vec{F})(T_0) &= (\nabla \cdot \vec{F})(T_0) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \big(P(T_0), Q(T_0), R(T_0)\big) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(T_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(T_0) + \frac{\partial R}{\partial z}(T_0).\end{aligned}$$

Opomba: Lahko se prepričamo, da je divergenca določena z $\vec{F}$ in ni odvisna od izbire baze.

Opomba: Divergenca torej naredi iz vektorskega polja $\vec{F}$ skalarno polje $\operatorname{div} \vec{F}$.

5.1.5 Rotor vektorskega polja

Naj bo, kot prej, $\vec{F}$ gladko vektorsko polje na $\mathcal{U}$. Rotor vektorskega polja $\vec{F}$ v točki T_0 je vektor $(\operatorname{rot} \vec{F})(T_0)$, podan kot

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} \vec{F})(T_0) &= (\nabla \times \vec{F})(T_0) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} (T_0) \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(T_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(T_0), \frac{\partial P}{\partial z}(T_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(T_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(T_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(T_0)\right).\end{aligned}$$

Opomba: Rotor torej naredi iz vektorskega polja $\vec{F}$ vektorsko polje $\operatorname{rot} \vec{F}$.

Opomba: Vse tri operacije $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div} \vec{F}$, $\operatorname{rot} \vec{F}$ so neodvisne od izbire baze.

Izrek 34 *Če je f skalarno polje razreda $\mathcal{C}^2$ na nekem območju $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, tedaj je*

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) \equiv \vec{0}.$$

Če je $\vec{F}$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^2$ na nekem območju $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, tedaj je

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) \equiv 0.$$

Kratko zapisano; za gladka polja je

$$\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} \equiv \vec{0}$$

in

$$\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} \equiv 0.$$

Dokaz: Naj bo u skalarno polje,

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

tedaj je

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right).
\end{aligned}$$

Ker so mešani odvodi zvezni, niso odvisni od vrstnega reda odvajanja. Od tod sledi

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = (0, 0, 0).$$

Naj bo $\vec{F} = (P, Q, R)$ vektorsko polje,

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

tedaj je

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}.
\end{aligned}$$

Ker so mešani odvodi zvezni, niso odvisni od vrstnega reda odvajanja. Od tod sledi

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0.$$

□

Opomba: Enakosti $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, u) \equiv \vec{0}$ in $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \vec{F}) \equiv 0$, ki veljata za $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D})$ in $\vec{F} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D})$, si lažje zapomnimo, če ju zapišemo z operatorjem ∇, torej

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, u) &= \nabla \times \nabla u \\ &\equiv \vec{0} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \vec{F}) &= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \\ &= [\nabla, \nabla, \vec{F}] \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

Opomba: Oglejmo si še operator $\mathrm{div} \circ \mathrm{grad}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathrm{grad}) &= \mathrm{div}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \end{aligned}$$

Operator $\mathrm{div} \circ \mathrm{grad}$ imenujemo ***Laplaceov diferencialni operator***. Standardna oznaka zanj je

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}) = \Delta.$$

Opomba: Če zgornjo enakost zapišemo z operatorjem ∇, dobimo tudi pogosto oznako

$$\Delta = \mathrm{div}(\mathrm{grad}) = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2.$$

Definicija 46 *Funkcija g je **harmonična**, če je $\Delta g = 0$.*

Definicija 47 *Gladko vektorsko polje $\vec{F}$ na območju $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ je:*

(a) ***potencialno** ali **konzervativno**, če obstaja skalarno polje u, da je*

$$\vec{F} = \mathrm{grad}\, u.$$

*Če je $\vec{F}$ potencialno polje, imenujemo funkcijo u **potencial** tega polja.*

(b) ***irotacionalno*** *ali* ***nevrtinčno****, če je*

$$\operatorname{rot} \vec{F} \equiv \vec{0}.$$

(c) ***solenoidalno****, če je*

$$\operatorname{div} \vec{F} \equiv 0.$$

Diskusija: Zgoraj smo videli

(i) $\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} \equiv 0$

(ii) $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} \equiv 0$,

t.j.

(i) če je $\vec{F}$ potencialno polje ($\vec{F} \equiv \operatorname{grad} u$), tedaj je $\operatorname{rot} \vec{F} \equiv \vec{0}$.

(ii) če je $\vec{F} \equiv \operatorname{rot} G$, je $\operatorname{div} \vec{F} \equiv 0$.

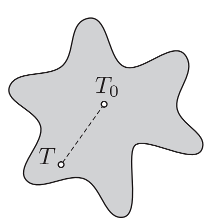
Pomembno vprašanje je ali velja obrat, t.j.

(i) če je vektorsko polje $\vec{F}$ nevrtinčno ($\operatorname{rot} \vec{F} \equiv \vec{0}$), ali obstaja tak potencial u, da je $\vec{F}$ potencialno vektorsko polje ($\vec{F} \equiv \operatorname{grad} u$)?

(ii) če je $\vec{F}$ solenoidalno vektorsko polje ($\operatorname{div} \vec{F} \equiv 0$), ali obstaja tako vektorsko polje G, da je $\vec{F} \equiv \operatorname{rot} G$?

Odgovor je v splošnem *ne* in je odvisen od območja na katerem je $\vec{F}$ definirana. Na zvezdastih območjih pa velja obrat tudi v splošnem.

Definicija 48 *Odprto povezano območje* $\mathcal{U}$ *je* ***zvezdasto****, če obstaja točka* $T_0 \in \mathcal{U}$*, da je za vsak* $T \in \mathcal{U}$ *vsa daljica* $\overline{T_0T}$ *vsobovana v* $\mathcal{U}$*.*



Slika 5.3: Slika zvezdastega območja

Izrek 35 *Naj bo $\mathcal{U}$ zvezdasto območje in naj bo $\vec{F}$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$ na $\mathcal{U}$.*

(a) *če je* $\operatorname{rot}\vec{F} \equiv 0$, *tedaj je $\vec{F}$ potencialno polje na $\mathcal{U}$, torej obstaja φ, t.j. skalarno polje razreda $\mathcal{C}^2$ na $\mathcal{U}$, da je* $\vec{F} \equiv \operatorname{grad}\varphi$.

(b) *če je* $\operatorname{div}\vec{F} \equiv 0$, *tedaj obstaja G, t.j. vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^2$ na $\mathcal{U}$, da je* $\vec{F} \equiv \operatorname{rot} G$.

Dokaz: Privzemimo, da je $T_0 \in \mathcal{U}$ v koordinatnem izhodišču, sicer naredimo translacijo. Naj bo $\vec{F} = (A, B, C)$.

(a) Predpostavimo, da je $\operatorname{rot}\vec{F} \equiv 0$, t.j

$$(*) \qquad \frac{\partial C}{\partial y} \equiv \frac{\partial B}{\partial z}, \quad \frac{\partial A}{\partial z} \equiv \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial x} \equiv \frac{\partial A}{\partial y}$$

povsod na $\mathcal{U}$. Definiramo za $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}) :&= \int_0^1 \big(A(t\vec{r})x + B(t\vec{r})y + C(t\vec{r})z\big)dt \\
&= \int_0^1 \big(A(tx,ty,tz)x + B(tx,ty,tz)y + C(tx,ty,tz)z\big)dt.
\end{aligned}$$

To je dobro definirano, saj je cela daljica s krajiščema $(0,0,0)$ in (x,y,z) v našem $\mathcal{U}$. Izračunajmo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\vec{r}) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\big(A(tx,ty,tz)x + B(tx,ty,tz)y + C(tx,ty,tz)z\big)dt \\
&= \int_0^1 \Bigg(A(tx,ty,tz) + \frac{\partial A}{\partial x}(tx,ty,tz)tx + \\
&\qquad + \frac{\partial B}{\partial x}(tx,ty,tz)ty + \frac{\partial C}{\partial x}(tx,ty,tz)tz\Bigg)dt \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^1 \left(A + t\left(x\frac{\partial A}{\partial x} + y\frac{\partial A}{\partial y} + z\frac{\partial A}{\partial z}\right)\right)dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(tA(tx,ty,tz)\big)dt \\
&= \big[tA(tx,ty,tz)\big]_{t=0}^{t=1} \\
&= A(x,y,z).
\end{aligned}$$

Podobno pokažemo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = B \quad \text{in} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = C.$$

(b) Predpostavimo $\operatorname{div}\vec{F} \equiv 0$, t.j.

$$(**) \qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Definiramo

$$\alpha(\vec{r}) := \int_0^1 tA(t\vec{r})dt, \quad \beta(\vec{r}) := \int_0^1 tB(t\vec{r})dt, \quad \gamma(\vec{r}) := \int_0^1 tC(t\vec{r})dt.$$

in

$$G := (z\beta - y\gamma, x\gamma - z\alpha, y\alpha - x\beta).$$

Izračunamo

$$\operatorname{rot} G = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z\beta - y\gamma & x\gamma - z\alpha & y\alpha - x\beta \end{vmatrix}$$

in si najprej ogledamo $\operatorname{rot} G \cdot \vec{i}$, t.j. prvo komponento vektorskega polja $\operatorname{rot} G$.

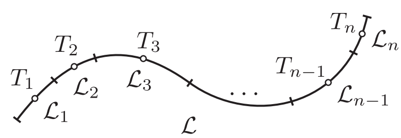
$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} G \cdot \vec{i} &= \alpha + y\frac{\partial \alpha}{\partial y} - x\frac{\partial \beta}{\partial y} - x\frac{\partial \gamma}{\partial z} + \alpha + z\frac{\partial \alpha}{\partial z} \\
&= 2\alpha - x\left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) + y\frac{\partial \alpha}{\partial y} + z\frac{\partial \alpha}{\partial z} \\
&\overset{(**)}{=} 2\alpha + x\frac{\partial \alpha}{\partial x} + y\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\
&= 2\int_0^1 tA(tx, ty, tz)dt + x\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 tA(tx, ty, tz)dt + \\
&\quad + y\frac{\partial}{\partial y}\int_0^1 tA(tx, ty, tz)dt + z\frac{\partial}{\partial z}\int_0^1 tA(tx, ty, tz)dt \\
&= \int_0^1 \left(2tA + t^2x\frac{\partial A}{\partial x} + t^2y\frac{\partial A}{\partial y} + t^2z\frac{\partial A}{\partial z}\right)dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(t^2A(tx, ty, tz)\big)dt \\
&= \big[t^2A(tx, ty, tz)\big]_{t=0}^{t=1} \\
&= A(x, y, z)
\end{aligned}$$

Podobno pokažemo še $\operatorname{rot} G \cdot \vec{j} = B(x, y, z)$ in $\operatorname{rot} G \cdot \vec{k} = C(x, y, z)$, torej $\vec{F} = \operatorname{rot} G$. $\square$

5.2 Krivuljni integrali

5.2.1 Integral skalarne funkcije

Motiv je npr. izračun mase krivulje, za katero je dana dolžinska gostota. Naj bo $\mathcal{L}$ gladek lok, f gostota, f zvezna funkcija na $\mathcal{L}$. Približek za maso dobimo tako, da lok $\mathcal{L}$ razdelimo na „podloke” $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_n$ in predpostavimo, da je gostota v posameznem „podloku” konstantna.



Slika 5.4: Delitev loka $\mathcal{L}$

Približek za maso loka $\mathcal{L}$ je tako

$$m(\mathcal{L}) \approx f(T_1)L(\mathcal{L}_1) + f(T_2)L(\mathcal{L}_2) + \ldots + f(T_n)L(\mathcal{L}_n),$$

pri čemer je z $L(\mathcal{L}_i)$ označena dolžina i-tega loka. V limiti, ko gre dolžina najdaljšega delčka loka proti 0, dobimo

$$m(\mathcal{L}) = \lim \sum_{j=1}^{n} f(T_j)L(\mathcal{L}_j).$$

Izračun: Naj bo $\alpha \leq t \leq \beta$, $t \mapsto \vec{r}(t)$ regularna parametrizacija. Naj bo $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$, $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$, $1 \leq i \leq n$, $\vec{r}(t) = T_i$. Dolžina i-tega delčka loka je

$$\begin{aligned} L(\mathcal{L}_i) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\vec{r}}(\tau)| d\tau \\ &\approx |\dot{\vec{r}}(\xi_i)|(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Približek za maso loka $\mathcal{L}$ je tako

$$m(\mathcal{L}) \approx \sum_{i=1}^{n} f\big(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)\big)|\dot{\vec{r}}(\tau)|(t_i - t_{i-1}),$$

kar je Riemannova vsota za zgornjo izbiro delitvenih točk in izbire ξ_i. V limiti, ko gre dolžina najdaljšega „podloka” proti 0, dobimo

$$m(\mathcal{L}) = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)|\dot{\vec{r}}(t)| dt.$$

Definicija 49 *Zgornjo limito $m(\mathcal{L})$ imenujemo* ***krivuljni integral skalarne funkcije*** *f* ***po loku*** *$\mathcal{L}$, torej*

$$m(\mathcal{L}) = \lim \sum_{i=1}^{n} f(T_i)L(\mathcal{L}_i),$$

ko gre dolžina najdaljšega delčka krivulje proti 0, in ga označimo z

$$\int_{\mathcal{L}} f ds,$$

torej

$$\int_{\mathcal{L}} f ds := \lim \sum_{i=1}^{n} f(T_i)L(\mathcal{L}_i),$$

ko gre dolžina najdaljšega delčka krivulje proti 0.

Če krivuljo parametriziramo, $\alpha \leq t \leq \beta$, $t \mapsto \vec{r}(t)$ regulrana parametrizacija, tedaj je

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{L}} f ds &= \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\vec{r}(t)\big)|\dot{\vec{r}}(t)|dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}dt.\end{aligned}$$

Opomba: Za definicijo bi lahko vzeli tudi zadnjo formulo.

Opomba: Zgornji integral je neodvisen od izbire parametrizacije.

Zgled: Izračunaj maso prvega zavoja vijačnice

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

če je njena gostota v točki (x, y, z) enaka $f(x, y, z) = z$. Torej

$$\begin{aligned} m &= \int_{\mathcal{L}} f ds \\ &= \int_0^{2\pi} z(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}dt \\ &\overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} z(t)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}t dt \\ &= \sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= 2\sqrt{2}\pi^2. \end{aligned}$$

(∗) $\dot{x} = -\sin t$, $\dot{y} = \cos t$, $\dot{z} = 1$. $\Diamond$

Opomba: Zgornje računanje mase pove še kako bi definirali integral skalarnega polja vzdolž poti $\lambda : [\alpha, \beta] \to \mathcal{U}$, ($\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, λ ima tri komponente),

$$\int_\lambda f ds := \int_\alpha^\beta f\big(\lambda(t)\big)|\dot{\lambda}(t)|dt.$$

5.2.2 Integral vektorske funkcije po usmerjeni poti

Motiv je npr. izračun dela pri premikanju točke v polju sil. Naj bo $\vec{F}$ konstantno vektorsko polje (t.j. v vsaki točki je sila ista). Pri premiku iz $\vec{r}_1$ v $\vec{r}_2$ opravimo delo, $A = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$.

V splošnem; dana je gladka pot $t \mapsto \vec{g}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. Vzdolž tira te poti je dano vektorsko polje $\vec{F}$. (Običajno bo $\mathcal{U}$ odprta množica, $\vec{F}$ zvezno vektorsko polje na $\mathcal{U}$, tir poti $\vec{g}$ pa vsebovan v $\mathcal{U}$).

Kako torej izračunati delo pri premiku točke vzdolž $\vec{g}$ v polju sil $\vec{F}$? Izračunajmo približek tako, da tir poti razdelimo na manjše kose: $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$, izberemo $t_{i-1} \le \xi_i \le t_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Koščekdela pri premiku od $\vec{g}(t_{i-1})$ do $\vec{g}(t_i)$ je približno

$$\vec{F}\big(\vec{g}(\xi_i)\big) \cdot \big(\vec{g}(t_i) - \vec{g}(t_{i-1})\big),$$

približek za celotno delo pa

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^n \vec{F}\big(\vec{g}(\xi_i)\big) \cdot \big(\vec{g}(t_i) - \vec{g}(t_{i-1})\big) \\ &\approx \sum_{i=1}^n \vec{F}\big(\vec{g}(\xi_i)\big) \cdot \dot{\vec{g}}(\xi_i)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

V limiti, ko gre dolžina najdaljšega intervala $[t_{i-1}, t_i]$ proti 0, dobimo

$$A = \int_\alpha^\beta \vec{F}\big(\vec{g}(t)\big) \cdot \dot{\vec{g}}(t)dt.$$

Definicija 50 *Številu*

$$\int_\alpha^\beta \vec{F}\big(\vec{g}(t)\big) \cdot \dot{\vec{g}}(t)dt$$

pravimo ***integral zveznega vektorskega polja*** $\vec{F}$ ***po gladki poti*** $t \mapsto \vec{g}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. *Označimo ga*

$$\int_{\vec{g}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

($*$) Opomba: Če je $h : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ difeomorfizem, ki ohranja smer, je

$$\int_{\vec{g}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

kjer je $\vec{\gamma}(t) = \vec{g}\big(h(t)\big)$. To je posledica substitucijske formule

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{g}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}\big(\vec{g}(t)\big) \cdot \dot{\vec{g}}(t) dt \\
&= \int_a^b \vec{F}\Big(\vec{g}\big(h(\tau)\big)\Big) \cdot \dot{\vec{g}}\big(h(\tau)\big) h'(\tau) d\tau \\
&= \int_a^b \vec{F}\big((\vec{g} \circ h)(\tau)\big) \cdot (\vec{g} \circ h)^{\cdot}(\tau) d\tau \\
&= \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.
\end{aligned}$$

Opomba: Integral bi lahko definirali tudi direktno kot limito Riemannovih vsot

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}\big(\vec{g}(\xi_i)\big) \cdot \big(\vec{g}(t_i) - \vec{g}(t_{i-1})\big).$$

Opomba: Če smer gibanja obrnemo, integral spremeni predznak, t.j. če pot $t \mapsto \vec{g}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, zamenjamo s potjo $\tau \mapsto \vec{g}(\beta - \tau)$, $0 \le \tau \le (\beta - \alpha)$.

Zaradi opombe ($*$) je mogoče definirati integral vektorskega polja po usmerjenem loku.

Definirajmo integral vektorskega polja po usmerjenem loku. Naj bo $\mathcal{L}$ usmerjen gladek lok, t.j. vemo katera točka je začetna in katera končna. Naj bo $\vec{F}$ dano vektorsko polje vzdolž $\mathcal{L}$. Izberimo regularno parametrizacijo $t \mapsto \vec{r}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, našega loka $\mathcal{L}$, tako da je $\vec{r}(\alpha)$ začetna in $\vec{r}(\beta)$ končna točka.

Definicija 51 *Število*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

imenujemo integral vektorskega polja $\vec{F}$ po usmerjenem loku $\mathcal{L}$ in ga označimo

$$\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Opomba: Definicija je dobra, saj je zaradi opombe ($*$) neodvisna od tega, kakšno regularno parametrizacijo vzamemo. Pomembno je le, da ohranja smer.

Zgled: Naj bo $\mathcal{L}$ prvi zavoj vijačnice

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

z začetno točko $(2,0,0)$ in končno točko $(2,0,\pi)$. Izračunaj $\int_{\mathcal{L}} \vec{f} \cdot d\vec{r}$, kjer je $\vec{f}$ vektorsko polje, $\vec{f}(x,y,z) = (x, 2y, 3z)$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{L}} \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} \vec{f}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \dot{\vec{r}}(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2\cos t, 2\cdot 2\sin t, 3\cdot 3t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t, 3)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-4\cos t \sin t + 8\sin t\cos t + 27t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (4\cos t\sin t + 27t)dt \\
&= \left[-2\cos^2 t + \frac{27t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=2\pi} \\
&= 54\pi^2
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Opomba: Oznaka: Če je vektorsko polje $\vec{F}$,

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big),$$

tedaj $\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ dostikrat zapišemo kot

$$\int_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy + Rdz).$$

Zapis je dober, saj če je $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ naša parametrizacija, je $dx = \dot{x}(t)dt$, $dy = \dot{y}(t)dt$, $dz = \dot{z}(t)dt$ in zato

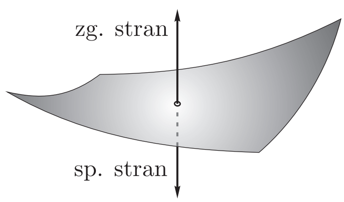
$$\begin{aligned}
Pdx + Qdy + Rdz &= \big(P\dot{x}(t) + Q\dot{y}(t) + R\dot{z}(t)\big) \\
&= \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \dot{\vec{r}}(t)dt.
\end{aligned}$$

Izračun je tedaj

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy + Rdz) = \int_{\alpha}^{\beta} \Big(&P\big(x(t), y(t), z(t)\big)\dot{x}(t) + \\
&+ Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)\dot{y}(t) + \\
&+ R\big(x(t), y(t), z(t)\big)\dot{z}(t)\Big)dt.
\end{aligned}$$

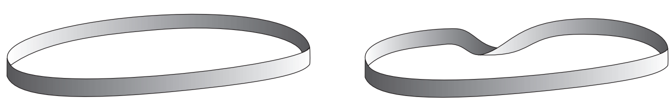
5.3 Orientabilnost in orientacija ploskev

Naj bo $\mathcal{M}$ gladka ploskev v prostoru. Lokalno je mogoče ploskev vedno zapisati kot graf, zato ima lokalno takšna ploskev vedno dve strani, slika 5.5. Pravimo, da ploskev v neki točki orientiramo, če si izberemo eno od njenih dveh strani, t.j. če si izberemo enega od njenih dveh enotskih normalnih vektorjev v tej točki.



Slika 5.5: Normalna enotska vektorja na ploskev

Globalna ***orientacija ploskve*** $\mathcal{M}$ je konsistentna, t.j. zvezna izbira enotskih normalnih vektorjev na vsej ploskvi. Pravimo, da je ploskev ***orientabilna*** (***dvostranska***), če ji je mogoče dati orientacijo.



Slika 5.6: Orientabilna in neorientabilna ploskev

Vsak košček ploskve, ki ga je mogoče parametrizirati, je vedno orientabilen, saj lahko zapišemo $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Delta$, $\operatorname{rang} \vec{r}(u, v) = 2$. To pomeni, da sta

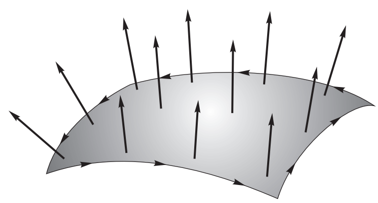
$$\vec{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \text{in} \quad \vec{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

v vsaki točki linearno neodvisna. Torej je mogoče vzeti

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

za enotski normalni vektor, ki se zvezno spreminja z (u, v).

Naj bo $\mathcal{M}$ orientirana ploskev z robom, ki je iz gladkih lokov. Rob $b\mathcal{M}$ orientiramo skladno z orientacijo ploskve na način kot kaže slika 5.7. Torej orientacijo izberemo tako, da če sprehajalec, katerega glava kaže v smeri z orinetacijo ploskve izbrane normale, hodi po robu v tej smeri, vidi ploskev na svoji levi.



Slika 5.7: Orientacija ploskve je skladna z orientacijo roba

Orientacija ploskve torej inducira orientacijo roba.

Opomba: Če ploskvi spremenimo orientacijo, se spremeni tudi orientacija roba ploskve.

5.4 Ploskovni integrali

5.4.1 Integral skalarnega polja po dani ploskvi

Motiv je npr. izračun mase gladke ploskve $\mathcal{M}$, kjer je vzdolž ploskve dana zvezna ploskovna gostota f. Maso ploskve izračunamo tako, da jo najprej razdelimo na majhne kose $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_n$. V vsakem kosu izberemo točko $T_i \in \mathcal{M}_i$. Približek za maso je

$$m(\mathcal{M}) \approx \sum_{i=1}^{n} f(T_i)p(\mathcal{M}_i),$$

kjer je $p(\mathcal{M}_i)$ površina i-tega koščka ploskve. V limiti, ko gre premer največjega kosa proti 0, dobimo točno maso

$$m(\mathcal{M}) = \lim \sum_{i=1}^{n} f(T_i)p(\mathcal{M}_i).$$

Definicija 52 *Naj bo $\mathcal{M}$ omejena gladka ploskev, omejena z gladkimi loki in f zvezna funkcija na $\mathcal{M} \cup b\mathcal{M}$. Razdelimo $\mathcal{M}$ na končno kosov $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_n$.*

Izberimo točko $T_i \in \mathcal{M}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *in tvorimo Riemannovo vsoto*

$$\sum_{i=1}^{n} f(T_i)p(\mathcal{M}_i),$$

kjer je $p(\mathcal{M}_i)$ *površina* i*-tega kosa ploskve* $\mathcal{M}$*. Limito te vsote, ko gre največji od polmerov ploskvice* $\mathcal{M}_i$ *proti* 0*, imenujemo ploskovni integral (skalarne) funkcije* f *po ploskvi* $\mathcal{M}$ *in jo označimo z*

$$\iint_{\mathcal{M}} f dS,$$

t.j.

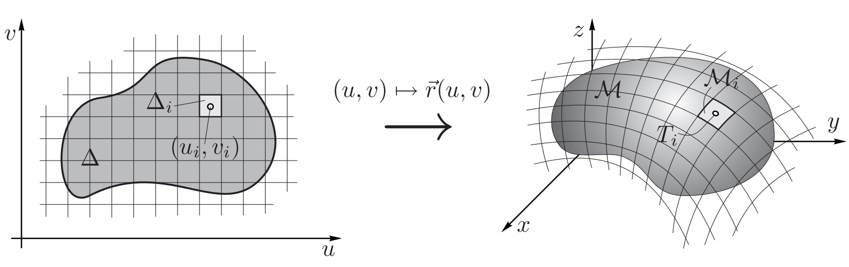
$$\iint_{\mathcal{M}} f dS := \lim \sum_{i=1}^{n} f(T_i)p(\mathcal{M}_i),$$

ko gre največji od polmerov $\mathcal{M}_i$ *proti* 0*.*

Opomba: Seveda je definicijo mogoče napraviti za splošne omejene funkcije; Če limita obstaja in je neodvisna od izbire točk delitve $\mathcal{M}$ in procesa ko gre največji od premerov proti 0, tedaj pravimo, da je f integrabilna in limito imenujemo ploskovni integral $\iint_{\mathcal{M}} f dS$.

Izračun, če je ploskev podana parametrično

Naj bo $(u, v) \in \Delta$, $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$ regularna parametrizacija ploskve, $\vec{r}$ gladka vektorska funkcija na območju Δ, ki je omejen s končnim številom gladkih lokov in rang $\big(\vec{r}(u, v)\big) \equiv 2$. Recimo, da je f zvezna na $\mathcal{M}$, kjer je $\mathcal{M} = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in \Delta\}$.



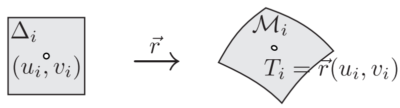
Slika 5.8: Ploskev $\mathcal{M}$ je podana parametrično

Območje Δ razdelimo na pravokotnike. Vzemimo tiste, ki so vsebovani v Δ;

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$.

$$
\begin{aligned}
p(\mathcal{M}_1) &= \iint_{\Delta_i} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv \\
&= \iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} dudv
\end{aligned}
$$

V vsakem Δ_i si izberemo točko (u_i, v_i). Označimo s T_i točko $\vec{r}(u_i, v_i)$ na ploskvici $\mathcal{M}_i$.



Slika 5.9: Točka (u_i, v_i) na pravokotniku Δ_i in točka $\vec{r}(u_i, v_i)$ na ploskvici $\mathcal{M}_i$

Zapišemo Riemannovo vsoto:

$$
\sum_{i=1}^{n} f(T_i) p(\mathcal{M}_i) = \sum_{i=1}^{n} f\big(\vec{r}(u_i, v_i)\big) \iint_{\Delta_i} \sqrt{EG - F^2} dudv.
$$

Pri tem je

$$
\iint_{\Delta_i} \sqrt{EG - F^2} dudv \approx \sqrt{EG - F^2}\Big|_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} p(\Delta_i),
$$

saj je integrand zvezen. Zato

$$
\sum_{i=1}^{n} f(T_i) p(\mathcal{M}_i) = \sum_{i=1}^{n} f\big(\vec{r}(u_i, v_i)\big) \sqrt{EG - F^2}\Big|_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} p(\Delta_i),
$$

kar je približna Riemannova vsota za funkcijo

$$
(u, v) \mapsto f\big(\vec{r}(u, v)\big) \sqrt{EG - F^2}
$$

na območju Δ. V limiti dobimo

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{M}} f dS &= \iint_{\Delta} f\big(\vec{r}(u, v)\big) \sqrt{EG - F^2} dudv \\
&= \iint_{\Delta} f\big(\vec{r}(u, v)\big) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv.
\end{aligned}
$$

Opomba: Bolj zapleteno ploskev razdelimo na kose.

Opomba: Integral ni odvisen od orientacije ploskve.

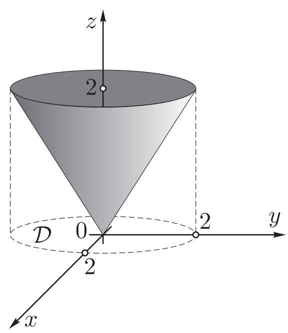
Opomba: Če je ploskev dana eksplicitno $z = z(x,y)$, $(x,y) \in \Delta$ in je na ploskvi dana funkcija f, tedaj je

$$\iint_{\mathcal{M}} f dS = \iint_{\Delta} f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy.$$

Zgled: Integrirajmo funkcijo f, ki je dana s predpisom

$$f(x,y,z) = xyz$$

po plašču stožca $z^2 = x^2 + y^2$, $0 < z < 2$.



Slika 5.10: Stožec

Pri tem je

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\}.$$

Parametrizirajmo kar z x, y. Torej

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= \sqrt{x^2+y^2}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{M}} f dS &= \iint_{\Delta} f(x, y, \sqrt{x^2+y^2}) \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy \\
&\overset{(*)}{=} \iint_{\Delta} xy\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} dxdy \\
&= \sqrt{2}\iint_{\Delta} xy\sqrt{x^2+y^2} dxdy \\
&\overset{(**)}{=} \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (r^3\cos\varphi\sin\varphi) r dr \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=2} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \\
&= \frac{32\sqrt{2}}{5}\int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(*) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ in $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(**) vpeljemo polarne koordinate: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, pri čemer $\varphi \in [0, 2\pi)$, $r \in [0, 2)$ $\Diamond$

Zgled: Izračunajmo zgornji integral tako, da isto ploskev parametriziramo na naslednji način:

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\cos\varphi, \\
y &= \rho\sin\varphi, \\
z &= \rho,
\end{aligned}
$$

pri čemer $\varphi \in [0, 2\pi)$ in $\rho \in [0, 2)$. Upoštevamo

$$\iint_{\mathcal{M}} f dS = \iint_{\Delta} f\big(\vec{r}(\rho,\varphi)\big)|\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi| d\rho d\varphi.$$

Pri tem je

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \rho) \\
f\big(\vec{r}(\rho,\varphi)\big) &= \rho^3\cos\varphi\sin\varphi \\
\vec{r}_\rho &= (\cos\varphi, \sin\varphi, 1) \\
\vec{r}_\varphi &= (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0) \\
|\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi| &= \sqrt{2}\rho
\end{aligned}
$$

in zato

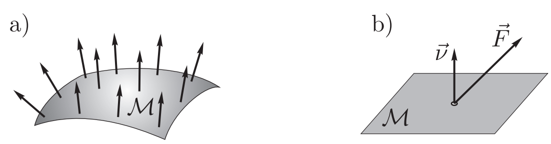
$$
\begin{aligned}
\iint_\Delta f\big(\vec{r}(\rho,\varphi)\big)|\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi| d\rho d\varphi &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \sqrt{2}\rho d\rho \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{r=0}^{r=2} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \\
&= \frac{32\sqrt{2}}{5}\int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Dobimo enako kot prej, saj integral ni odvisen od izbire regularne parametrizacije.

$\Diamond$

5.4.2 Integral vektorskega polja po orientirani ploskvi

Motiv: Naj bo na območju $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ dano vektorsko polje $\vec{F}$. Mislimo si, da je to hitrostno polje pri gibanju nestisljive tekočine, ki se s časom ne spreminja. V $\mathcal{D}$ imamo dano še neko orientirano ploskev $\mathcal{M}$, t.j. predpisani so normalni vektorji na $\mathcal{M}$, ki se zvezno spreminjajo po vsej ploskvi $\mathcal{M}$, slika 5.11a). Zanima nas koliko tekočine preteče skozi ploskev $\mathcal{M}$ v neki časovni enoti, v smeri predpisane normale. To bi znali izračunati, če je ploskev $\mathcal{M}$ ravna in $\vec{F}$ konstantno polje, slika 5.11b). Naj bo $\vec{\nu}$ enotski normalni vektor na ploskev. Pretok je torej $(\vec{F}\cdot\vec{\nu})p(\mathcal{M})$.



Slika 5.11: a) Orientirana ploskev $\mathcal{M}$, b) Pretok vektorskega polja $\vec{F}$ skozi $\mathcal{M}$ v smeri $\vec{\nu}$

V splošnem pa dobimo približek takole: Ploskev $\mathcal{M}$ razdelimo na koščke $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_n$. V vsakem koščku $\mathcal{M}_i$ izberemo točko $T_i \in \mathcal{M}_i$. Pretok skozi $\mathcal{M}$ je približno

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}(T_i)\cdot\vec{\nu}(T_i)p(\mathcal{M}_i).$$

V limiti, ko gre največji premer največje ploskvice proti 0, dobimo integral skalarne funkcije $\vec{F}\cdot\vec{\nu}$ po ploskvi $\mathcal{M}$, torej

$$\iint_M \vec{F}\cdot\vec{\nu}dS.$$

Opomba: Integral vektorskega polja $\vec{F}$ po orientirani ploskvi $\mathcal{M}$ definiramo kot limito zgornje vsote, ko gre največji premer koščkov proti 0. Dostikrat pa definiramo z zgornjim izrazom.

Definicija 53 *Izraz*

$$\iint_{\mathcal{M}} \vec{F}\cdot\vec{\nu}dS$$

imenujemo ***ploskovni integral vektorskega polja*** $\vec{F}$ *po orientirani ploskvi* $\mathcal{M}$ *v smeri predpisane normale* $\vec{\nu}$*; ali še krajše: pretok vektorskega polja* $\vec{F}$ *skozi* $\mathcal{M}$ *v smeri* $\vec{\nu}$*.*

Opomba: Včasih pišemo tudi

$$\iint_{\mathcal{M}} \vec{F}\cdot\vec{\nu}dS := \iint_{\mathcal{M}} \vec{F}\cdot d\vec{S},$$

kjer je $\mathcal{M}$ orientirana ploskev, t.j. vemo kam kaže $\vec{\nu}$.

Opomba: Če ploskvi spremenimo orientacijo, integral spremeni predznak.

Izračun, če je ploskev podana parametrično

Naj bo $(u,v)\in\Delta$, $(u,v)\mapsto\vec{r}(u,v)$ regularna parametrizacija ploskve. Naj bo $\vec{r}$ gladka na $\overline{\Delta}$. Preslikava $\vec{r}$ je torej injektivna na $\overline{\Delta}$ in $\operatorname{rang}\vec{r}\equiv 2$. Smer normale $\vec{\nu}$ je predpisana. Torej

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{M}} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{M}} \vec{F}\cdot\vec{\nu}dS \\ &= \pm\iint_{\Delta} \vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big)\cdot\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|dudv \\ &= \pm\iint_{\Delta}\Big[\vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big),\vec{r}_u,\vec{r}_v\Big]\,dudv,\end{aligned}$$

kjer uporabimo znak $+$, če ima $\vec{r}_u\times\vec{r}_v$ isto smer kot predpisani $\vec{\nu}$, sicer uporabimo znak $-$.

Opomba: Oznake integralov vektorskih funkcij $A = (P, Q, R)$

$$\int_{\mathcal{L}} A \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$\iint_{\mathcal{M}} A \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{M}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Opomba: Vsi integrali po krivuljah in ploskvah imajo običajne lastnosti integralov; (i) linearnost: integral vsote je enak vsoti integralov in integral funkcije pomnožene s skalarjem je enak s skalarjem pomnoženemu integralu, (ii) če je krivulja ali ploskev sestavljena iz dveh kosov, je integral enak vsoti integralov po posameznih kosih. Pri tem moramo paziti na orientacijo.

Opomba: Če je ploskev $\mathcal{M}$ kos xy-ravnine in f funkcija na $\mathcal{M}$, tedaj iz definicije integrala sledi, da je

$$\iint_{\mathcal{M}} f dS = \iint_{\mathcal{M}} f(x, y) dxdy.$$

Zgled: Integrirajmo vektorsko polje $\vec{F}$,

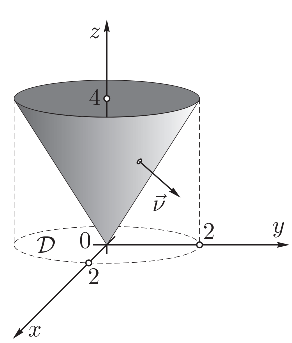
$$\vec{F}(x, y, z) = (y, x, xz),$$

po zunanji strani plašča stožca

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad 0 \leq z \leq 4,$$

t.j. po plašču stožca v smeri zunanje normale. Pri tem je

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}.$$



Slika 5.12: Stožec

Parametrizirajmo kar z x, y. Torej

$$
\begin{aligned}
x &= x \\
y &= y \\
z &= 2\sqrt{x^2+y^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{M}} \vec{F}\cdot\vec{\nu}dS &= \iint_{\Delta} \vec{F}\big(x,y,z(x,y)\big)\cdot(-\tfrac{\partial z}{\partial x},-\tfrac{\partial z}{\partial y},1)dxdy \\
&= \iint_{\Delta} \vec{F}(y,x,2x\sqrt{x^2+y^2})\cdot\left(-\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)dxdy \\
&= 2\iint_{\Delta}\left(x\sqrt{x^2+y^2}-\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy \\
&\overset{(*)}{=} 2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\big(r^2\cos\varphi-2r\cos\varphi\sin\varphi\big)\,rdr \\
&= 2\int_0^{2\pi}\left(4\cos\varphi-\frac{16}{3}\cos\varphi\sin\varphi\right)d\varphi \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$(*)$ vpeljemo polarne koordinate: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $J(r,\varphi)=r$, pri čemer $\varphi\in[0,2\pi)$, $r\in[0,2)$ $\Diamond$

Zgled: Integral iz zgornje naloge bomo izračunali s pomočjo parametrizacije $\vec{r}$,

$$\vec{r}(\rho,\varphi)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,2\rho),$$

kjer $0\le\varphi<2\pi$, $0\le\rho\le 2$. Torej

$$\Delta=\{(\rho,\varphi):0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\rho\le 2\}.$$

$$\iint_{\mathcal{M}}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\pm\iint_{\Delta}\left[\vec{F}\big(\vec{r}(\rho,\varphi)\big),\vec{r}_\rho,\vec{r}_\varphi\right]d\rho d\varphi$$

V zgornji formuli bomo uporabili znak $+$, če $\vec{r}_\rho\times\vec{r}_\varphi$ kaže v smeri predpisanega $\vec{\nu}$, sicer znak $-$. Pri tem je

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_\rho &= (\cos\varphi,\sin\varphi,2) \\
\vec{r}_\varphi &= (-\rho\sin\varphi,\rho\cos\varphi,0)
\end{aligned}
$$

in

$$\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi = (-2\rho\cos\varphi, -2\rho\sin\varphi, \rho).$$

Vektor $\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi$ ima glede na z-os pozitivno smer, predpisani $\vec{\nu}$ pa v negativno smer, zato v zgornji formuli uporabimo znak $-$. Torej

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{M}} \vec{F}\cdot d\vec{S} = -\iint_{\Delta} &\begin{vmatrix} \rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 2\rho^2\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 2 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} d\rho d\varphi \\ &= -2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(\rho^3\cos\varphi - 2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\right) d\rho \\ &\overset{(*)}{=} 0.\end{aligned}$$

$(*)$ kot v prejšnjem zgledu. $\Diamond$

5.5 Integralski izreki

5.5.1 Gaussov izrek

Izrek 36 *Naj bo $\mathcal{D}$ omejeno območje v $\mathbb{R}^3$, katerega rob je sestavljen iz končnega števila gladkih ploskev. Orientiramo rob $b\mathcal{D}$ tako, da izberemo zunanjo normalo. Naj bo $\vec{F}$ gladko vektorsko polje v okolici $\mathcal{D}\cup b\mathcal{D}$. Tedaj velja*

$$\iint_{b\mathcal{D}} \vec{F}\cdot dS = \iiint_{\mathcal{D}} (\operatorname{div}\vec{F}) dxdydz.$$

Opomba: Ta izrek se včasih imenuje tudi ***izrek Gauss-Ostrogradskega***. Pove, da je pretok (navzven) vektorskega polja skozi rob območja $\mathcal{D}$ enak trojnemu integralu divergence tega polja po območju $\mathcal{D}$.

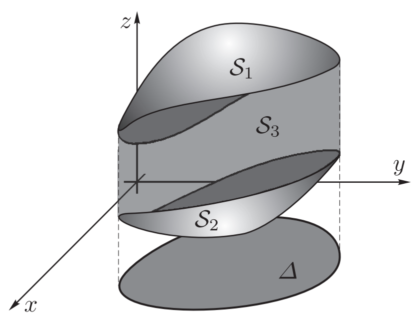
Dokaz: Izrek najprej dokažemo za preprosta območja, t.j. taka območja, katerih rob sekajo premice, ki so vzporedne koordinatnim osem in sekajo $\mathcal{D}$, največ v dveh točkah. Naj bo $\vec{F} = (P, Q, R)$, $\vec{\nu}$ vektor v smeri zunanje normale, $\vec{\nu} = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$ na $b\mathcal{D}$. Dokazati je potrebno

$$\begin{aligned}\iint_{b\mathcal{D}} \vec{F}\cdot\vec{\nu} dS &= \iint_{b\mathcal{D}} \big(P(x,y,z)\nu_x + Q(x,y,z)\nu_y + R(x,y,z)\nu_z\big) dS \\ &= \iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.\end{aligned}$$

Dokazali bomo

$$(*)\left\{\begin{aligned}\iint_{b\mathcal{D}} P(x,y,z)\nu_x d\mathcal{S} &= \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz\\ \iint_{b\mathcal{D}} Q(x,y,z)\nu_y d\mathcal{S} &= \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz\\ \iint_{b\mathcal{D}} R(x,y,z)\nu_z d\mathcal{S} &= \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.\end{aligned}\right.$$

Če enakosti zgoraj seštejemo, dobimo ravno željeno. Natančneje si oglejmo tretjo enakost.



Slika 5.13: Rob območja $\mathcal{D}$ je sestavljen iz treh delov

Rob $b\mathcal{D} = \mathcal{S}$ je sestavljen iz treh delov,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3,$$

kjer je

$$\mathcal{S}_1 = \{z = h(x,y);\ (x,y) \in \Delta\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{z = g(x,y);\ (x,y) \in \Delta\}$$

in

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) : g(x,y) < z < h(x,y), (x,y) \in \Delta\}.$$

Najprej izračunajmo

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz &= \iint_{\Delta} dxdy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz\\ &\overset{\dagger}{=} \iint_{\Delta} \Big(R\big(x,y,h(x,y)\big) - R\big(x,y,g(x,y)\big)\Big) dxdy,\end{aligned}$$

(† po osnovnem izreku integralskega računa) nato pa še

$$\iint_{b\mathcal{D}} R(x,y,z)\nu_z d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}_1} + \iint_{\mathcal{S}_2} + \iint_{\mathcal{S}_3} R(x,y,z)\nu_z d\mathcal{S}.$$

Na $\mathcal{S}_1$ je $z = h(x,y)$ in

$$\vec{\nu} = \frac{\left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Na $\mathcal{S}_2$ je $z = g(x,y)$ in

$$\vec{\nu} = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, -1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Na $\mathcal{S}_1$ je torej

$$\nu_z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

na $\mathcal{S}_2$ je

$$\nu_z = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

na $\mathcal{S}_3$ je

$$\nu_z = 0.$$

Torej

$$\iint_{\mathcal{S}} R(x,y,z)d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}_1} \frac{R(x,y,z)}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1}}\, d\mathcal{S} -$$

$$- \iint_{\mathcal{S}_2} \frac{R(x,y,z)}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}}\, d\mathcal{S} + 0$$

$$\stackrel{\dagger\dagger}{=} \iint_{\Delta} \frac{R\big(x,y,h(x,y)\big)}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1}} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1}\, d\mathcal{S} -$$

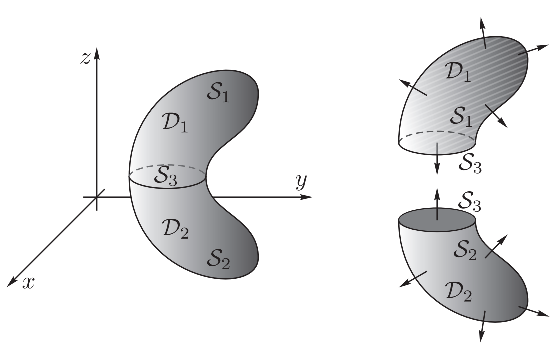
$$- \iint_{\Delta} \frac{R\big(x,y,g(x,y)\big)}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}\, d\mathcal{S}$$

$$= \iint_{\Delta} \Big(R\big(x,y,h(x,y)\big) - R\big(x,y,g(x,y)\big)\Big) dxdy,$$

†† po formuli za prevedbo ploskovnega integrala na dvojni integral, ko je ploskev dana eksplicitno.

Torej je zadnja enakost v $(*)$ dokazana. Enako dokažemo ostali dve. S tem je za enostavna območja izrek dokazan. Bolj zapletena območja razkosamo na enostavna območja in integrale seštejemo.



Slika 5.14: Bolj zapletena območja razkosamo na enostavna območja

Komentar k zgornji sliki: območje $\mathcal{D}$, ki je „zapleteno", razdelimo na „enostavni" območji $\mathcal{D}_1$, ki je omejeno z $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{D}_2$, ki je omejeno z $\mathcal{S}_2$ in $\mathcal{S}_3$.

Zapišemo Gaussov izrek za območje $\mathcal{D}_1$

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{D}_1} \operatorname{div} \vec{F} dV &= \iint_{b\mathcal{D}_1} \vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{S}} \\ &= \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{S}} + \iint_{\mathcal{S}_3} \vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{S}}\end{aligned}$$

(v obeh integralih $\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{F} d\vec{\mathcal{S}}$ in $\iint_{\mathcal{S}_3} \vec{F} d\vec{\mathcal{S}}$ kaže normala ven iz $\mathcal{D}_1$) in Gaussov izrek za $\mathcal{D}_2$

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{D}_2} \operatorname{div} \vec{F} dV &= \iint_{b\mathcal{D}_2} \vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{S}} \\ &= \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{S}} + \iint_{\mathcal{S}_3} \vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{S}}\end{aligned}$$

(v obeh integralih $\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ in $\iint_{\mathcal{S}_3} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ kaže normala ven iz $\mathcal{D}_2$).

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}_1} \operatorname{div} \vec{F} dV + \iint_{\mathcal{D}_2} \operatorname{div} \vec{F} dV &= \iint_{\mathcal{S}_1} + \iint_{\mathcal{S}_2} + \iint_{\mathcal{S}_3} + \iint_{\mathcal{S}_3} \vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{S}} \\ &\overset{\ddagger}{=} \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{S}} + \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{S}} \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{S}}\end{aligned}$$

‡ ker v zadnjih integralih integriramo isto polje po isti ploskvi z različnima orientacijama. □

Zgled: Integrirajmo vektorsko polje $\vec{F}$,

$$\vec{F} = (x, xz, xy),$$

po sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ v smeri zunanje normale.

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 4\} \\ b\mathcal{D} &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{b\mathcal{D}} \vec{F}\cdot d\vec{\mathcal{S}} &= \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div}\vec{F}dV\\ &\overset{(*)}{=} \iiint_{\mathcal{D}} 1dV\\ &= \left[\frac{4\pi r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2}\\ &= \frac{32\pi}{3}.\end{aligned}$$

$(*)$ $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 1+0+0 = 1.$ ◊

Zgled: Izračunaj ploskovni integral

$$\iint_{\mathcal{S}} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$$

po sferi $\mathcal{S} \equiv x^2+y^2+z^2 = 1$ v smeri notranje normale. Imamo

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 < 1\}$$

$$b\mathcal{D} = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

$$\vec{F} = (x^2,y^2,z^2)$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = 2x+2y+2z.$$

Torej

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot d\vec{\mathcal{S}} &= -\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div}\vec{F}dxdydz\\ &= -\iiint_{\mathcal{D}}(2x+2y+2z)dxdydz\\ &\overset{(*)}{=} -2\iiint_{\mathcal{D}'}(u^2+v^2+w^2)8uvw\,dudvdw\\ &\overset{(**)}{=} -16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2\pi} d\vartheta\int_0^1 r^2(\cos^2\varphi\cos^2\vartheta+\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+\sin^2\varphi)\cdot\\ &\qquad\qquad\cdot r^3\cos\varphi\cos\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi dr\\ &= -16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2\pi} d\vartheta\int_0^1 r^5\cos\varphi\cos\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi dr\\ &= -\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta\\ &= 0.\end{aligned}$$

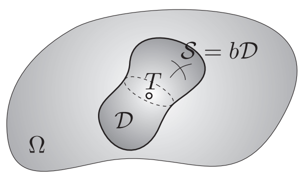
$(*)$ vpeljemo nove integracijske spremenljivke: $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$, pri čemer $J(u,v,w) = 8uvw$

$(**)$ vpeljemo sferne koordinate: $u = r\cos\varphi\cos\vartheta$, $v = r\cos\varphi\sin\vartheta$, $w = r\sin\varphi$, $J(r,\vartheta,\varphi) = r^2\cos\varphi$

$\Diamond$

5.5.2 Brezkoordinatna definicija divergence

Naj bo Ω območje v prostoru. Na njem definiramo vektorsko polje $\vec{F}$ razreda $\mathcal{C}^1$. Naj bo $\mathcal{D}$ območje, ki je skupaj s svojim robom vsebovano v Ω in T točka iz $\mathcal{D}$. Naj bo $\mathcal{S}$ sklenjena gladka ploskev, ki predstavlja rob območja $\mathcal{D}$ (npr. $\mathcal{S}$ je majhna sfera s središčem v T).



Slika 5.15: Območje Ω v prostoru

Tedaj je

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d\mathcal{S}$$

enako pretoku vektorskega polja $\vec{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$ v smeri zunanje normale $\vec{\nu}$. Torej če je $\vec{F}$ hitrostno polje pri gibanju tekočine, je zgornji integral enak količini tekočine, ki priteče vsako sekundo skozi $\mathcal{S}$ v smeri zunanje normale.

Torej je

$$\frac{1}{V(\mathcal{D})}\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d\mathcal{S}$$

povprečna gostota izvorov v območju $\mathcal{D}$. Po Gaussovem izreku

$$\begin{aligned}\frac{1}{V(\mathcal{D})}\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d\mathcal{S} &= \frac{1}{V(\mathcal{D})}\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div}\vec{F} dxdydz\\ &\stackrel{\dagger}{=} \operatorname{div}\vec{F}\big|_{T^*}\ ,\end{aligned}$$

($\dagger$ po izreku o povprečni vrednosti), kjer je $T^* \in \mathcal{D}$. Ko $\mathcal{D}$ stisnemo v točko, dobimo

$$\lim_{\mathcal{D}\to T}\frac{1}{V(\mathcal{D})}\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d\mathcal{S} = (\operatorname{div}\vec{F})(T).$$

To formulo bi lahko uporabili za brezkoordinatno definicijo divergence. Divergenca v točki T je enaka gostoti izvorov vektorskega polja $\vec{F}$ v točki T.

5.5.3 Stokesov izrek

Izrek 37 *Naj bo $\mathcal{M}$ omejena gladka orientirana ploskev razreda $\mathcal{C}^2$, katere rob je sestavljen iz končnega števila gladkih lokov. Orientacirajmo rob $b\mathcal{M}$ skladno z orientacijo ploskve $\mathcal{M}$. Naj bo $\vec{F}$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$, definirano v okolici množice $\mathcal{M} \cup b\mathcal{M}$. Tedaj je*

$$\int_{b\mathcal{M}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{M}} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{\nu} d\mathcal{S}.$$

Opomba: Ta izrek imenujemo ***Stokesov izrek***. Pove, da je krivuljni integral vektorskega polja $\vec{F}$ po usmerjenem robu je enak ploskovnemu integralu polja $\operatorname{rot} \vec{F}$ po ploskvi (ob usklajenih orientacijah $\mathcal{M}$ in $b\mathcal{M}$).

Opomba: Torej je

$$\begin{aligned}\int_{b\mathcal{M}} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\mathcal{M}} &\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz- \\ &- \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dydz+ \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dydz.\end{aligned}$$

Poseben primer Stokesovega izreka

V primeru, ko je $R \equiv 0$, P in Q pa odvisna le od x in y in $\mathcal{M}$ je območje v xy-ravnini, katerega rob je pozitivno orientiran, dobimo t.i. ***Greenovo formulo***:

Izrek 38 (Greenova formula) *Naj bo $\mathcal{D}$ omejeno območje v ravnini, katerega rob je sestavljen iz končnega števila gladkih lokov in je pozitivno orientirano. Naj bosta P in Q gladki funkciji na $\mathcal{D} \cup b\mathcal{D}$. Tedaj je*

$$\int_{b\mathcal{D}} Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Zgled: Izračunajmo ploščino elipse, katere rob je podan parametrično

$$x = a \cos t,$$

$$y = b \sin t,$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

Vzemimo

$$P(x,y) = -y, \quad Q(x,y) = x.$$

Pri tem je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Iz Greenove formule sledi

$$\begin{aligned}
\int_{b\mathcal{D}} Pdx + Qdy &= \iint_{\mathcal{D}} \big(1 - (-1)\big) dxdy \\
&= 2 \iint_{\mathcal{D}} 1 \; dxdy \\
&= 2p
\end{aligned}$$

oziroma

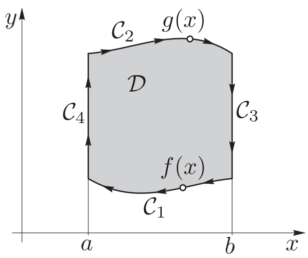
$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2} \int_{b\mathcal{D}} Pdx + Qdy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(- y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)\big) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big((-a \sin t)(-b \sin t) + (a \cos t)(b \cos t)\big) dt \\
&= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\
&= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt \\
&= \pi ab.
\end{aligned}$$

Ploščina elipse s polosema a in b je $p = \pi ab$. $\Diamond$

Dokaz: (Greenove formule) Naj bo $\mathcal{D}$ območje v ravnini tako, da je mogoče zapisati

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : f(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b\},$$

kjer sta f, g odsekoma gladki funkciji razreda $\mathcal{C}^1$.



Slika 5.16: Območje $\mathcal{D}$ v ravnini

Naj bo P gladka funkcija na $\mathcal{D} \cup b\mathcal{D}$. Tedaj je

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy \right) dx \\ &= \int_a^b \Big(P\big(x, g(x)\big) - P\big(x, f(x)\big)\Big) dx \\ &= \int_a^b P\big(x, g(x)\big) dx + \left(- \int_a^b P\big(x, f(x)\big) dx \right),\end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned}\int_a^b P\big(x, g(x)\big) dx &= \int_a^b P\big(x, g(x)\big) \cdot 1 \; dx \\ &= \int_{\mathcal{C}_2} Pdx \quad \left(= \int_{\mathcal{C}_2} Pdx + 0dy \right)\end{aligned}$$

(opomba: parameter je x, torej $x = x$, $\dot{x} = 1$, $y = g(x)$)

in

$$- \int_a^b P\big(x, f(x)\big) dx = \int_{\mathcal{C}_1} Pdx.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int_{\mathcal{C}_1} Pdx + \int_{\mathcal{C}_2} Pdx + \int_{\mathcal{C}_3} Pdx + \int_{\mathcal{C}_4} Pdx \\ &= - \int_{b\mathcal{D}} Pdx\end{aligned}$$

Znak $-$ zato, ker je rob $b\mathcal{D}$ orientiran ravno nasprotno kot $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$. Če na $\mathcal{C}_3$ izračunamo

$$\int_{\mathcal{C}_3} Pdx = \int P(b,y)\dot{x}dy = 0,$$

(opomba: parameter je y, torej $y = y$, $x = b$, $\dot{x} = 0$, $g(b) \leq y \leq f(b)$).

Podobno za $\mathcal{C}_4$

$$\int_{\mathcal{C}_3} Pdx = 0,$$

torej

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{b\mathcal{D}} Pdx.$$

Splošnejša območja pa razrežemo na sama enostavna območja, podobno kot pri Gaussovem izreku (integrali se po rezih medsebojno izničijo).

Torej za vsako območje v izreku velja

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{b\mathcal{D}} Pdx.$$

Enako velja (če vlogi x in y zamenjamo), da je

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{b\mathcal{D}} Qdx.$$

Sedaj znak + zato, ker ista orientacija $b\mathcal{D}$ pomeni x spodaj v smeri x-osi, pri y pa spodaj v smeri $-y$-osi. Ko obe enakosti seštejemo, dobimo

$$\int_{b\mathcal{D}} Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

□

Sedaj dokažemo še Stokesov izrek.

Dokaz: (Stokesovega izreka) Dokazati je potrebno

$$\int_{b\mathcal{M}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{M}} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{\nu} d\mathcal{S},$$

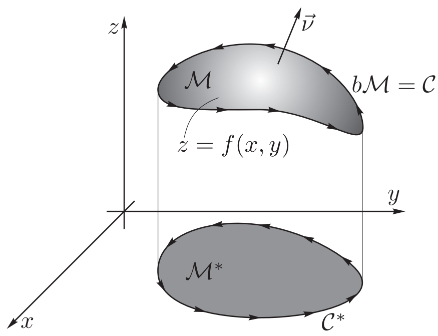
torej

$$\begin{aligned}\int_{b\mathcal{M}} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\mathcal{M}} \Bigg(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \nu_x - \\ - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \nu_y + \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \nu_z \Bigg) d\mathcal{S}.\end{aligned}$$

Predpostavimo najprej, da je ploskev $\mathcal{M}$ taka, da jo je hkrati mogoče zapisati v obliki

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad z = h(y, z), \quad \text{(na 3 ralične načine)}$$

kjer so f, g in h gladke funkcije.



Slika 5.17: Orientirana gladka ploskev $\mathcal{M}$

Dokažemo, da je

$$(*1) \qquad \iint_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\nu_y - \frac{\partial P}{\partial y}\nu_z\right) d\mathcal{S} = \int_{b\mathcal{M}} P dx.$$

Pišimo

$$\begin{aligned}
\int_{b\mathcal{M}} P dx &= \int_{b\mathcal{M}} \vec{A} \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{A} = (P, 0, 0) \\
&= \lim \sum \vec{A}(\tau_k) \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_{k-1}) \\
&= \lim \sum P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \lim \sum \Big(P\big(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k)\big)(x_k - x_{k-1}) + 0(y_k - y_{k-1})\Big) \\
&= \int_{\mathcal{C}^*} P\big(x, y, f(x, y)\big) dx.
\end{aligned}$$

Pokazali smo

$$\int_{b\mathcal{M}} P dx = \int_{\mathcal{C}^*} P\big(x, y, f(x, y)\big) dx.$$

Uporabimo Greenovo formulo v ravnini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}^*} P\big(x, y, f(x, y)\big) dx &= -\iint_{\mathcal{M}^*} \frac{\partial}{\partial y}\Big(P\big(x, y, f(x, y)\big)\Big) dx dy = \\
&= -\iint_{\mathcal{M}^*} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx dy.
\end{aligned}$$

Če pokažemo

$$(*2) \qquad -\iint_{\mathcal{M}^*} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx dy = \iint_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\nu_y - \frac{\partial P}{\partial y}\nu_z\right) d\mathcal{S},$$

potem sledi, da je $\vec{\nu}$ vzporeden $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$. V situaciji na zgornji sliki je

$$\begin{aligned}\vec{\nu} &= \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{|\vec{\nu}|}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right).\end{aligned}$$

Izračunajmo

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\nu_y - \frac{\partial P}{\partial y}\nu_z\right) d\mathcal{S} &= \iint_{\mathcal{M}^*} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{|\vec{\nu}|} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{|\vec{\nu}|}\right)|\vec{\nu}|dxdy \\ &= \iint_{\mathcal{M}^*} \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,\end{aligned}$$

kar dokaže enačbo $(*2)$.

S tem smo dokazali enakost $(*1)$. Ostali dve analogni enakosti dokažemo na enak način. Vsota vseh treh dokaže Stokesovo formulo za enostavne ploskve. Splošnejše ploskve pa razkosamo in upoštevamo, da se krivuljni integrali po rezih med seboj izničijo. $\square$

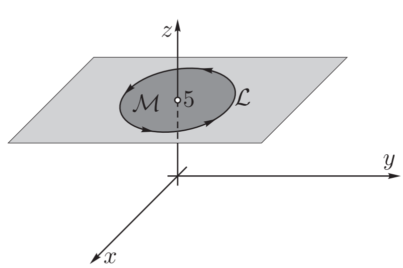
Zgled: Izračunaj integral

$$\int_{\mathcal{L}} xy^2z^2dx + x^2yz^2dy + x^2y^2zdz,$$

kjer je $\mathcal{L}$ parametrično podana krožnica,

$$\begin{aligned}x &= 2\cos t \\ y &= 2\sin t, \quad (0 \le t \le 2\pi) \\ z &= 5,\end{aligned}$$

ki je orientirana skladno s pozitivno smerjo osi z.



Slika 5.18: Krožnica $\mathcal{L}$ leži v ravnini $z = 5$

Naj bo $\mathcal{M}$ krog z robom $b\mathcal{M} = \mathcal{L}$ v ravnini $z = 5$. Vektor $\vec{\nu}$ kaže v smeri z-osi, $\vec{\nu} = 0, 0, 1$. Ker je

$$\vec{F} = (xy^2z^2, x^2yz^2, x^2y^2z),$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = (2x^2yz - 2x^2yz, 2xy^2z - 2xy^2z, 2xyz^2 - 2xyz^2) \equiv (0, 0, 0),$$

in od tod

$$\int_{b\mathcal{M}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{M}} (\operatorname{rot}\vec{F}) \cdot \vec{\nu}\mathcal{S} = 0.$$

Torej je $\int_{\mathcal{L}} xy^2z^2dx + x^2yz^2dy + x^2y^2zdz = 0$. $\Diamond$

5.5.4 Brezkoordinatna definicija rotorja

Spomnimo se: $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$ pomeni delo v polju sil $\vec{F}$ po usmerjeni krivulji $\mathcal{L}$. Izračun je

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_\alpha^\beta \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \dot{\vec{r}}(t)dt \\
&= \int_\alpha^\beta \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}(t)|}\right) |\dot{\vec{r}}(t)|dt \\
&= \int_\alpha^\beta \left(\vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}(t)|}\right) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}dt \\
&= \int_{\mathcal{L}} (\text{tang. komp. vekt. polja vzdolž } \mathcal{L})ds
\end{aligned}$$

kjer je $\vec{r} = \vec{r}(t)$ regularna parametrizacija, $\alpha \le t \le \beta$.

Definicija 54 *Naj bo $\vec{F}$ gladko vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$ na prostorskem območju $\mathcal{D}$. Če je $\mathcal{L}$ sklenjena usmerjena krivulja, imenujemo*

$$\int_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

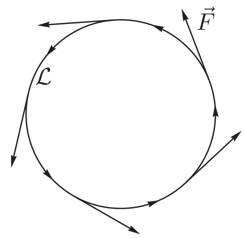
cirkulacija vektorskega polja *$\vec{F}$ vzdolž $\mathcal{L}$.*

Opomba: Včasih pišemo

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

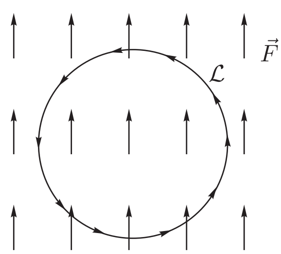
če želimo poudariti, da je krivulja $\mathcal{L}$ sklenjena.

Opomba: Tangencialna komponenta vektorskega polja $\vec{F}$ je ves čas pozitivna, zato bo tudi cirkulacija pozitivna, t.j. $\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$, slika 5.19.



Slika 5.19: Cirkulacija je pozitivna

Tangencialna komponenta vektorskega polja $\vec{F}$ je na desni ves čas pozitivna, na levi strani pa ves čas negativna, zato cirkulacija enaka 0, t.j. $\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, slika 5.20.



Slika 5.20: Cirkulacija je enaka 0

Naj bo $T \in \mathcal{D}$ in $\mathcal{M}$ majhna ploskev, npr. disk, ki vsebuje T. Stokesov izrek pravi

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_{\mathcal{M}} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{\nu} d\mathcal{S} \\ &\stackrel{\dagger}{=} p(\mathcal{M}) \big[(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{\nu}\big]_{T^*} \end{aligned}$$

† po izreku o povprečni vrednosti, torej

$$\big[(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{\nu}\big]_{T^*} = \frac{1}{p(\mathcal{M})} \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

in zato, ko $\mathcal{M} \to T$, zaradi zveznosti funkcije $(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{\nu}$, je

$$\big[(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{\nu}\big]_{T} = \lim_{\mathcal{M} \to T} \frac{1}{p(\mathcal{M})} \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

To je komponenta od $\operatorname{rot}\vec{F}$ v smeri $\vec{\nu}$, zapisana neodvisno od koordinat. Tako bi rotor lahko tudi definirali.

5.5.5 Neodvisnost krivuljnega integrala od poti

Območje je odprta povezana množica $\mathbb{R}^3$ (vsaki dve točki območja je mogoče povezati s poligonsko črto).

Krivuljni integral

$$\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy + Rdz$$

je v splošnem odvisen od $\vec{F}$ in še od poti $\mathcal{L}$ po kateri integriramo.

Zanima nas kdaj je morda na $\mathcal{D}$ krivuljni integral $\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ neodvisen od poti, t.j. za poljubni točki $A, B \in \mathcal{D}$ in za poljubno odsekoma gladko pot $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$ z začetno točko A in končno točko B, je integral $\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ odvisen le od A in B, nič pa od poti, ki povezuje A z B.

Izrek 39 *Naj bodo P, Q, R zvezne funkcije na območju $\mathcal{D}$ v prostoru $\mathbb{R}^3$. Tedaj je na $\mathcal{D}$ integral*

$$\int_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy + Rdz \quad \left(= \int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (P, Q, R) \right)$$

neodvisen od poti natanko tedaj, ko obstaja na $\mathcal{D}$ neka skalarna funkcija

$$(x, y, z) \mapsto u(x, y, z),$$

da polje $\vec{F} = (P, Q, R) = \operatorname{grad} u$, t.j.

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial u}{\partial z}$$

oziroma (kar je isto)

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

je totalni diferencial funkcije u. V tem primeru imenujemo funkcijo u potencial vektorskega polja $\vec{F}$.

Dokaz: ($\Rightarrow$) Naj bo $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ neodvisen od poti. Fiksirajmo točko $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{D}$ in za poljubno točko $B = (x, y, z) \in \mathcal{D}$ definiramo

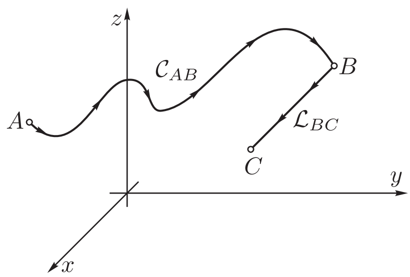
$$u(x, y, z) = \int_{\mathcal{C}_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz,$$

kjer je $\mathcal{C}_{AB}$ pot v $\mathcal{D}$ z začetno točko A in končno točko B. Funkcija u je dobro definirana, saj je naš integral odvisen le od (x, y, z), nič pa od poti $\mathcal{C}_{AB}$.

Pokažemo, da za naš u velja

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = R,$$

povsod na $\mathcal{D}$.



Slika 5.21: Pot $\mathcal{C}_{AB}$ in daljica $\mathcal{L}_{BC}$

Dodamo k $\mathcal{C}_{AB}$ še daljico od B do C, $C = (x + h, y, z)$, t.j. daljico v smeri x-osi z začetno točko B in končno točko C. Jasno je

$$\int_{\mathcal{L}_{AC}} = \int_{\mathcal{L}_{AB}} + \int_{\mathcal{L}_{BC}} .$$

Torej

$$u(x + h, y, z) = u(x, y, z) + \int_{\mathcal{L}_{BC}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Parametrizirajmo daljico $\mathcal{L}_{BC}$.

$$x = t, \quad y = y, \quad z = z$$

$$x \leq t \leq x + h$$

$$\dot{x} \equiv 1, \quad \dot{y} \equiv 0, \quad \dot{z} \equiv 0$$

Torej

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{L}_{BC}} Pdx + Qdy + Rdz &= \int_x^{x+h} \big(P(t, y, z) \cdot 1 + Q \cdot 0 + R \cdot 0\big) dt \\
&= \int_x^{x+h} P(t, y, z) dt \\
&\overset{\dagger}{=} P(\xi, x, z) \cdot h,
\end{aligned}$$

(† po izreku o povprečni vrednosti), kjer je $x \le \xi \le x+h$. Od tod pa sledi

$$u(x+h,y,z) - u(x,y,z) = h \cdot P(\xi,x,z),$$

kjer je $x \le \xi \le x+h$. Zato

$$\frac{1}{h}\big(u(x+h,y,z) - u(x,y,z)\big) = P(\xi,x,z)$$

v limiti

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(u(x+h,y,z) - u(x,y,z)\big) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ \xi\to x}} P(\xi,x,z)\\ &= \lim_{\xi\to x} P(\xi,x,z)\\ &\overset{*}{=} P(x,y,z),\end{aligned}$$

($*$ zaradi zveznosti P), torej $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z)$. To velja za vsak $(x,y,z) \in \mathcal{D}$. Podobno pokažemo še za $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ in $\frac{\partial u}{\partial z} = R$.

($\Leftarrow$) Naj bo

$$P \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad R \equiv \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R \equiv \frac{\partial u}{\partial z}$$

na $\mathcal{D}$ in naj bo $\mathcal{L}_{AB}$ gladka pot od A do B. Parametrizirajmo $\mathcal{L}_{AB}$

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \le t \le \beta,$$

torej

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_\alpha^\beta \Bigg(&\frac{\partial u}{\partial x}\big(x(t),y(t),z(t)\big)\dot{x}(t) + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial y}\big(x(t),y(t),z(t)\big)\dot{y}(t) + \frac{\partial u}{\partial z}\big(x(t),y(t),z(t)\big)\dot{z}(t)\Bigg)dt\\ &= u\big(x(\beta),y(\beta),z(\beta)\big) - u\big(x(\alpha),y(\alpha),z(\alpha)\big)\\ &= u(B) - u(A).\end{aligned}$$

Sklep: Če je $\vec{F}$ potencialn polje, t.j. $P \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$, $R \equiv \frac{\partial u}{\partial z}$, tedaj je krivuljni integral $\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ na $\mathcal{D}$ neodvisen od poti. Če je $\mathcal{L}$ pot od A do B v $\mathcal{D}$, je

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{L}_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\mathcal{L}_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz\\ &= u(B) - u(A).\end{aligned}$$

□

Na enak način dokažemo analogen izrek za ravninska območja.

Izrek 40 *Naj bosta $P(x, y)$, $Q(x, y)$ zvezni funkciji na območju $\mathcal{D}$ v ravnini. Tedaj je na $\mathcal{D}$ integral*

$$\int_{\mathcal{L}} P dx + Q dy$$

neodvisen od poti natanko tedaj, ko obstaja na $\mathcal{D}$ funkcija u, da je $P \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$ in $Q \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$ na $\mathcal{D}$.

Opomba: Če je polje sil $\vec{F}$ na območju v prostoru tako, da je $\vec{F} = \operatorname{grad} u$, mu pravimo potencialno polje ali konservativno polje. Potencial u se tedaj imenuje potencialna energija. Delo, t.j.

$$\int_{\mathcal{L}_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

je tedaj neodvisno od poti $\mathcal{L}_{AB}$ od A do B in je enako spremembi potencialne energije $u(B) - u(A)$.

Opomba: Krivuljni integral $\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ je neodvisen od poti na $\mathcal{D}$ natanko tedaj, ko je

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

po vsaki sklenjeni poti $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

Vemo tole: Če je integral polja $\vec{F}$ na $\mathcal{D}$ neodvisen od poti, je $\vec{F} \equiv \operatorname{grad} u$ na $\mathcal{D}$ in zato $\operatorname{rot} \vec{F} \equiv \vec{0}$ na $\mathcal{D}$. Vemo tudi: Če je območje $\mathcal{D}$ zvezdasto in $\operatorname{rot} \vec{F} \equiv \vec{0}$ na $\mathcal{D}$, tedaj obstaja u na $\mathcal{D}$, da je $\vec{F} = \operatorname{grad} u$. Torej za zvezdasta območja je $\operatorname{rot} \vec{F} \equiv \vec{0}$ potreben in zadosten pogoj, da je polje potencialno, t.j. $\vec{F} \equiv \operatorname{grad} u$ na $\mathcal{D}$. Za splošna območja pa to seveda ni res.

Zgled: Naj bo $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-os}\}$ in naj bo $\vec{F} = (P, Q, R)$, kjer je

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad R \equiv 0.$$

Pokaži, da je $\operatorname{rot}\vec{F} \equiv \vec{0}$ na $\mathcal{D}$ in pokaži, da polje ni potencialno na $\mathcal{D}$ tako, da pokažeš, da

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$$

za krožnico $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, $t \in [0, 2\pi)$.

Torej

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\\ &= (0,0,0)\end{aligned}$$

in

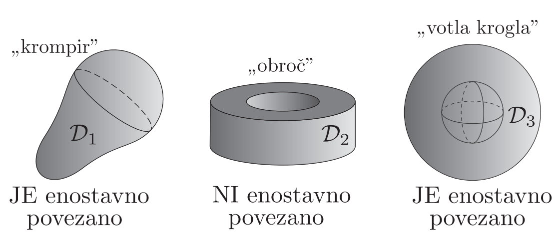
$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &\overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt\\ &= \int_0^{2\pi} dt\\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

$(*)$ v polarnih koordinatah: $\vec{F} = (-\sin t, \cos t, 0)$, $d\vec{r} = (-\sin t, \cos t, 0)$.

$\diamondsuit$

Vprašanje: Za kakšna območja pa je res, da iz $\operatorname{rot}\vec{F} \equiv \vec{0}$ na $\mathcal{D}$ sledi, da je $\vec{F} = \operatorname{grad} u$ za neko funkcijo u. Če bo na vsako sklenjeno krivuljo $\mathcal{C}$ mogoče znotraj $\mathcal{D}$ napeti ploskev $\mathcal{S}$, bo iz pogoja, da je $\operatorname{rot}\vec{F} \equiv \vec{0}$ sledilo $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\vec{F} d\vec{\mathcal{S}} = 0$. Torej bo po vsaki sklenjeni krivulji $\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, t.j. krivuljni integral neodvisen od poti oz. polje je potencialno $\vec{F} = \operatorname{grad} u$.

Definicija 55 *Območje $\mathcal{D}$ v prostoru je* ***enostavno povezano****, če lahko vsako sklenjeno krivuljo v $\mathcal{D}$ v tem območju zvezno deformiramo v točko.*



Slika 5.22: Območji $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_3$ sta enostavno povezani, območje $\mathcal{D}_2$ pa ni

Izrek 41 *Naj bo območje $\mathcal{D}$ v prostoru enostavno povezano in naj bo $\vec{F}$ gladko vektorsko polje na $\mathcal{D}$, za katerega je $\operatorname{rot}\vec{F} \equiv \vec{0}$ na $\mathcal{D}$. Tedaj je $\vec{F}$ potencialno polje, t.j. $\vec{F} \equiv \operatorname{grad} u$ na $\mathcal{D}$.*

Dokaz: (Skica.) Idejo dokaza smo razložili že zgoraj. Območje $\mathcal{D}$ je enostavno povezano, t.j. na vsako sklenjeno krivuljo $\mathcal{C}$ v $\mathcal{D}$ lahko napnemo ploskev $\mathcal{S}$. Iz $\operatorname{rot}\vec{F} \equiv \vec{0}$ in Stokesovega izreka sledi

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = 0.$$

Po vsaki sklenjeni krivulji je torej $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ oz. $\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ je neodvisen od poti. Po izreku je $\vec{F} \equiv \operatorname{grad} u$. □

Izrek 42 *Če je območje $\mathcal{D}$ v ravnini enostavno povezano in (P, Q) gladko vektorsko polje, za katero je $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$ na $\mathcal{D}$, tedaj je polje $\vec{F}$ na $\mathcal{D}$ potencialno, torej*

$$P \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Q \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$$

za neko funkcijo u.

Opomba: Obratno pa vedno velja, t.j. za

$$P \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Q \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$$

je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Stvarno kazalo