Holomorfne funkcije

(1) Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ povezana odprta množica in f funkcija, holomorfna na D. Katere od funkcij f_1, f_2 in f_3, definiranih s predpisi $f_1(z) = \overline{f(z)}$, $f_2(z) = f(\overline{z})$ in $f_3(z) = \overline{f(\overline{z})}$, so holomorfne?

(2) Naj bo $f = u + iv$ holomorfna funkcija z danim realnim delom $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Določi funkcijo f.

(3) Naj bo f funkcija kompleksne spremenljivke $z = x + iy$. Tedaj lahko preko zvez $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ in $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ na funkcijo f formalno gledamo kot na funkcijo spremenljivk z in $\overline{z}$. Dokaži, da je f holomorfna funkcija natanko tedaj ko velja

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

(4) Določi konstanto k tako, da bo $u(x, y) = e^x(\cos ky + \sin ky)$ realni del neke holomorfne funkcije f in nato določi še funkcijo f.

(5) Določi holomorfno funkcijo z realnim delom $u(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$.

(6) Določi holomorfno funkcijo f, za katero velja $|f(x + iy)| = (x^2 + y^2)e^x$.

(7) Kje so holomorfne funkcije, podane z naslednjimi potenčnimi vrstami?

a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$

b) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p z^n$, kjer je $p \in \mathbb{R}$

c) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

d) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$

e) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n2^n}$

f) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{n!}$

g) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!}$

h) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$ in $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 z^n$, če ima vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ konvergenčni polmer $R > 0$

(8) Funkcijo $f(z) = \sin z$ razvij okrog točke $z_0 = i$.

(9) Izračunaj integral kompleksne funkcije

$$\int_{\partial D} f(z)dz,$$

kjer je

a) $f(z) = |z|$ in $D = \{z \mid |z| < 1\,,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.

b) $f(z) = \frac{z}{\overline{z}}$ in $D = \{z \mid 1 < |z| < 2\,,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.

c) $f(z) = \overline{z}$ in D območje s kosoma gladkim robom.

d) f holomorfna funkcija v okolici $\overline{D}$ in D območje s kosoma gladkim robom.

(10) Dokaži, da je integral

$$\int_0^{1+2i} z dz$$

neodvisen od poti ter ga izračunaj.

(11) Naj bo $n > 1$ in $z_1, z_2, \ldots, z_n$ točke v kompleksni ravnini. Izračunaj integral

$$I = \int_C \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)},$$

a) če so vse točke $z_1, z_2, \ldots, z_n$ različne.

b) če so vse točke $z_1, z_2, \ldots, z_n$ poljubne.

(12) Naj bo f cela funkcija in n naravno število. Izračunaj integral

$$\int_C \frac{f(z)dz}{(z - 1)(z - 2)\cdots(z - n)}$$

za krivuljo C,

a) podano z enačbo $x^2 + 2y^2 = 2$.

b) podano z enačbo $|z| = \frac{5}{2}$.

(13) Določi vse možne Laurentove razvoje s središčem v $a = 0$ za funkcijo f, podano s predpisom

$$f(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + z - 6}.$$

(14) Določi glavni del Laurentove vrste za

a) $f(z) = \frac{\cos z}{z - \sin z}$ okrog točke $a = 0$.

b) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(e^{i\pi z}+1)}$ okrog točke $a = -1$.

(15) Razvij funkcijo $f(z) = \frac{z}{z^3-3z+2}$ okrog $a = 1$ in izračunaj integral

$$\int_{|z|=4} f(z)dz.$$

(16) Kakšne vrednosti lahko zavzame integral

$$\int_0^i \frac{dz}{z^2-2},$$

če integriramo po poti med 0 in i, ki ne vsebuje točk $\pm\sqrt{2}$?

(17) Izračunaj kompleksne integrale

a) $\int_{|z-2i|=2} \frac{dz}{z^2+9}$.

b) $\int_{|z-i/2|=1} \frac{dz}{(z^2+1)^3}$.

c) $\int_{|z|=3} \sin\frac{z}{z+i}dz$.

(18) Izračunaj kompleksni integral

$$\int_{|z-2|+|z+2|=6} \frac{1}{z}e^{\frac{1}{1-z}}dz.$$

(19) Prevedi integral

$$I = \int_0^{2\pi} h(\cos x, \sin x)dx$$

na integral kompleksne funkcije in nato za $a > 1$ izračunaj integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x\, dx}{a - \cos x}.$$

(20) S pomočjo kompleksne integracije izračunaj integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{1+x^2}.$$

(21) S pomočjo kompleksne integracije izračunaj integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x}.$$

(22) Naj bo $-1 < \alpha < 1$ in $0 < \varepsilon < R$. S pomočjo kompleksne integracije S pomočjo kompleksne integracije po robu območja $D = \{z \mid |z| \in (\varepsilon, R)\,,\ \operatorname{Re} z > 0\}$izračunaj integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha dx}{1+x^2}$$

in nato za $0 < p < 1$ izpelji formulo

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Nasvet: Za $0 < n+1 < m$ velja

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{1+x^m} = \frac{1}{m}\Gamma(\frac{n+1}{m})\Gamma(1-\frac{n+1}{m}).$$

(23) Naj bo $a > 0$, $0 < p < 1$ in $0 < \varepsilon < R$. S pomočjo kompleksne integracije po robu območja $D = \{z \mid |z| \in (\varepsilon, R)\,,\ \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z > 0\}$ izračunaj integrala

$$I_1 = \int_0^{\infty} x^{p-1}\cos ax dx \text{ in } I_2 = \int_0^{\infty} x^{p-1}\sin ax dx.$$

(24) Ali obstaja taka funkcija f, holomorfna v okolici 0, da za dovolj velika naravna števila n velja

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$?

b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$?

(25) Ali obstaja taka funkcija f, holomorfna v okolici 0, da za dovolj velika naravna števila n velja

$$n^{-\frac{5}{2}} < \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| < 3n^{-\frac{5}{2}}?$$

(26) Naj bosta $a \in (0,1)$ in $R > 0$. S pomočjo kompleksne integracijje po robu območja $D = \{z \mid \operatorname{Re} z \in (-R,R)\,,\ \operatorname{Im} z \in (0,2\pi)\}$ izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

(27) Naj bosta $a, R > 0$. S pomočjo kompleksne integracijje po robu območja $D = \{z \mid \operatorname{Re} z \in (-R,R)\,,\ \operatorname{Im}, z \in (0,a)\}$ izračunaj integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2ax) dx.$$

(28) Določi število ničel polinoma $p(z) = z^5 + 7z^4 - z^2 + 2$

a) na odprtem krogu $B(0,1)$

b) na zaprtem krogu $\overline{B}(0,1)$

c) na odprtem kolobarju $A(0;2,10)$

(29) Dokaži, da ima enačba $z \sin z = 1$ same realne rešitve.

(30) Ugotovi ali je območje D možno z biholomorfno preslikavo $f : D \to \triangle$ preslikati na odprt enotski krog $\triangle$. V primerih, ko f obstaja, poišči kak primer take preslikave.

a) $D = \{z \mid |z - i + 1| < \sqrt{2}\,,\ \operatorname{Im} \mathrm{z} > 0\}$

b) $D = \{z \mid |z - i| > \frac{1}{2}\,,\ |z - 2i| < 2\}$.

c) $D = \{z \mid |z - i| > 1\,,\ |z - 2i| < 2\}$.

(31) Poišči kako biholomorfno preslikavo $f : D \to \triangle$, če je

a) $D = \{z \mid \operatorname{Re} \mathrm{z} < 0\,,\ \operatorname{Im} \mathrm{z} \in (0,2\pi)\}$.

b) $D = \{z \mid |z - 1| > 1\,,\ |z - 2| < 2\,,\ \operatorname{Im} \mathrm{z} \in (0,2\pi)\}$.