Krivulje in ploskve v prostoru

1. Dana je krivulja s parametrizacijo
$$\vec{r} = (t - \sin nt, 1 - \cos t, 4\sin\frac{t}{2}).$$
V točki $T_0(\frac{\pi}{2}, 1, 2\sqrt{2})$ določi tangento in normalno ravnino.

2. Krivulja K je določena kot presek ploskev z enačabama $x^2 = 3y$ in $2xy = 9z$. Določi naravni parameter za krivuljo K in dolžino odseka krivulje K med točkama $(0,0,0)$ in $(3,3,2)$.

3. a) Parametriziraj krožnico $x^2 + y^2 = a^2$ in $z = 0$ z naravnim parametrom. Nato določi $\vec{r}\,'(s)$ in $\vec{r}\,''(s)$ in komentiraj ugotovitve.

   b) Posploši točko a) na poljubno krivuljo.

4. Naj bo $(\vec{T}_0, \vec{N}_0, \vec{B}_0)$ spremljajoči trieder gladke krivulje v v izbrani točki T_0. Oglej si projekciji krivulje K na koordinatni ravnini $(\vec{T}_0, \vec{N}_0)$ in $(\vec{T}_0, \vec{B}_0)$ blizu točke T_0.

5. Dana je krivulja K s parametrizacijo
$$\vec{r} = (\sin t, \operatorname{ch} t, \cos t).$$
a) Parametriziraj krivuljo K z naravnim parametrom.

   b) Določi spremljajoči trirob v točki $T_0(0,1,1)$.

6. Naj bo $a > 0$ in K krivulja s parametrizacijo
$$\vec{r}(t) = (ae^t \cos t, ae^t \sin t, e^t).$$
a) Preveri, da krivulja K leži na stožcu z enačbo $a^2 z^2 = x^2 + y^2$.

   b) Dokaži, da vsaka tvorilka plašča stožca seka krivuljo K pod istim kotom $\delta < \frac{\pi}{4}$.

7. Naj bo K gladka krivulja z dolžino l in $a > 0$ dovolj majhen. Definirajmo telo D kot unijo vseh normalnih krogov na krivuljo K s polmerom a (D je 'odebeljena' krivulja K). Dokaži, da je tedaj prostornna telesa D enaka $\pi a^2 \cdot l$.

8. Dana je ploskev S s parametrizacijo
$$\vec{r}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \sin r^2).$$
a) Ali je dana parametrizacija regularna.

   b) Določi kako regularno parametrizacijo ploskve S in preveri, da je S gladka podmnogoterost v $\mathbf{R}^2$.

   c) Določi tangentno ravnino na ploskev S v točki $(\sqrt{\pi}, 0, 0)$.

9. Naj bo f zvezno odvedljiva funkcija in S ploskev podana z zvezo

$$z = xf(x/y),$$

kjer je $x, y > 0$. Dokaži, da imajo vse tangentne ravnine na ploskev S skupno točko.

10. Izračunaj površino torusa s polmeroma $0 < a < R$.

11. Na enotski sferi s središčem v $(0, 0, 0)$, ki jo parametriziramo s sferičnima koordinatama φ in ϑ, leži krivulja K, podana z zvezo $\varphi = \operatorname{tg} \vartheta$. Določi dolžino krivulje K.