Krivuljni in ploskovni integrali

1. Naj bo $\vec{a} \in \mathbf{R}^3$ izbran vektor.

   a) Dokaži, da je gradient polja $\vec{f}(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}$ solenoidalno polje.

   b) Izračinaj rotor polja $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{a}$.

2. Določi vse take zvezno odvedljive funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, da bo

$$\vec{f}(x, y, z) = ((1 + x^2)f(x), -2xyf(x), -3z)$$

   solenoidalno polje.

3. a) Dokaži, da je $\vec{f}(x, y, z) = (2x \cos y - y^2 \sin x, 2y \cos x - x^2 \sin y, 4)$ potencialno in določi njegov potencial.

   b) Določi konstanti a in b tako, da bo polje

$$\vec{f}(x, y, z) = (2(axzy^4 - y), 2(bx^2zy^3 - x), 3x^2y^4)$$

   potencialno in določi njegov potencial.

4. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ konstantna vektorja. Dokaži enakost

$$\operatorname{grad} \frac{\vec{a}\vec{r}}{\vec{b}\vec{r}} = \frac{\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{b}\vec{r})^2}.$$

5. Dokaži zvezo

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{f})) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{f}) + \triangle\vec{f}.$$

6. Naj bosta $\vec{f}$ in $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$ gladki vektorski polji. Dokaži zvezi

   a)

$$\operatorname{div}(\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g}(\operatorname{rot}(\vec{f})) - \vec{f}(\operatorname{rot}(\vec{g})).$$

   b)

$$\operatorname{rot}(\vec{f} \times \vec{g}) = (\operatorname{div}(\vec{g}))\vec{f} - (\operatorname{div}(\vec{f}))\vec{g} - (\vec{f}\operatorname{grad})\vec{g} + (\vec{g}\operatorname{grad})\vec{f},$$

   kjer je $(\vec{f}\operatorname{grad})\vec{g} = (\vec{f}(\operatorname{grad} g_1), \vec{f}(\operatorname{grad} g_2), \vec{f}(\operatorname{grad} g_3))$.

7. Naj bo $a > 0$ in $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$. Izračunaj cirkulacijo polja $\vec{f}$ vzdolž preseka roba kocke $[0, a]^3$ in ravnine z enačbo $x + y + z = \frac{3a}{2}$.

8. Naj bo $a > 0$. Izračunaj težišče homogenega loka astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

   $x, y \geq 0$.

9. Dani sta števili $a > 0$ in α ter krivulja $K = S(0, a) \cap \Pi$, kjer je $S(a, 0)$ sfera s središčem v $(0, 0, 0)$ in polmerom a ter Π ravnina z enačbo $y = x\,\mathrm{tg}\alpha$. Izračunaj integral

$$\int_K (y-x)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

   a) direktno.

   b) s pomočjo Stokesovega izreka.

10. Naj bo $\vec{c} = (p, q, r)$ in $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{c} \times \vec{r}$. Izračunaj cirkulacijo polja $\vec{f}$ vzdolž roba ploskve $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\; x, y, z \geq 0\}$.

11. Naj bo S zunanja stran plašča valja, podanega z zvezama $x^2 + y^2 = 1$ in $z \in [0, h]$, kjer je $h > 0$. Izračunaj integral vektorskega polja

$$\vec{f}(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$$

   po ploskvi S

   a) direktno.

   b) s pomočjo Gaussovega izreka.

12. Naj bo $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\; x, y, z \geq 0\}$. Izračunaj integral

$$\int_S xy\,dxdy + yz\,dxdz + xz\,dxdy$$

   a) direktno.

   b) s pomočjo Gaussovega izreka.

13. Izračunaj integral

$$\int_{bD} \frac{dS}{(1 + x + y)^2},$$

   kjer je $D = \{(x, y, z) \mid x + y + z \leq 1\,,\; x, y, z \geq 0\}$.

14. Dana so števila $m, n, p > 0$ in a, b, c. Izračunaj integral

$$\int_S x^2\,dzdy + y^2\,dxdz + z^2\,dxdy,$$

   kjer je S zunanja stran elipsoida z enačbo

$$\left(\frac{x-a}{m}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{n}\right)^2 + \left(\frac{z-c}{p}\right)^2 = 1.$$

15. Dano je vektorsko polje $\vec{f}(\vec{r}) = |\vec{r}|^2\vec{r}$ in število $b > 0$. Izračunaj pretok polja $\vec{f}$ skozi

   a) rob območja $D = \{(x, y, z) \mid 2z \geq x^2 + y^2\,,\; z \leq b\}$.

   b) ploskev podano z zvezama $2z = x^2 + y^2$ in $z \leq b$.

16. Dane so točke $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n \in \mathbf{R}^3$ in števila $e_1, \ldots e_n$. Izračunaj pretok polja

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad} \frac{-e_i}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

skozi zaključeno ploskev, ki objame vse točke $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$.

17. Izračunaj integral

$$\int_K \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

če je $K \subset \mathbf{R}^2$ zaključena krivulja,

a) ki ne obkroži izhodišča.

b) ki obkroži izhodišče.

18. Dan je ploskovni integral

$$\int_S (1 + x^2) f(x)\,dydz - 2xyf(x)\,dzdx - 3z\,dxdy.$$

Določi zvezno odvedljivo funkcijo f tako, da bo integral I enak za vse ploskve S, katerih rob je krožnica $\{(\cos t, \sin t, 1) \mid t \in [0, 2\pi]\}$ in tedaj izračunaj integral I.

19. Dana sta vektorja $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b}$ in vektorsko polje $\vec{f}(\vec{r}) = (\vec{r} - \vec{a}) \times (\vec{r} - \vec{b})$. Izračunaj cirkulacijo polja $\vec{f}$ vzdolž krivulje, ki jo podajata zvezi $|\vec{r}| = |\vec{a}|$ in $\vec{r} \cdot \vec{a} = \frac{|\vec{a}|^2}{2}$.

20. Naj bo $h > 0$ in $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r}$. Izračunaj pretok polja $\vec{f}$ skozi plašč in osnovno ploskev stožca, podanega z zvezama $x^2 + y^2 \leq z^2$ in $0 \leq z \leq h$.

21. Naj bo K zaključena krivulja, ki poteka po sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Izračunaj integral

$$\int_K \frac{dx + dy + dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

22. Dokaži, da je $\vec{f}(x, y, z) = (2x\cos y - y^2 \sin x, 2y\cos x - x^2 \sin y, 4)$ potencialno, določi njegov potencial in izračunaj integral polja $\vec{f}$ vzdolž krivulje s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, kjer je $t \in [-2\pi, 2\pi]$.

23. Določi konstanti a in b tako, da bo polje

$$\vec{f}(x, y, z) = (2(axzy^4 - y), 2(bx^2zy^3 - x), 3x^2y^4)$$

potencialno in izračunaj integral $\int_K \vec{f} d\vec{r}$, kjer je K krivulja z začetno točko $(0, 0, 0)$ in končno točko $(1, 1, 1)$ ter pretok skozi površje kocke $[0, 1]^3$.

24. Dani sta dvakrat zvezno odvedljivi skalarni polji u in v in območje $D \subset \mathbf{R}^3$ s kosoma gladkim robom. Za enotski vektor $\vec{e}$ definiramo *smerni odvod* kot

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{e}.$$

Naj $\vec{n}$ označuje enotsko normalo ploskve bD. Dokaži:

a)
$$\int_{bD} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\, dS = \int_D (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + u \triangle v) dV$$

b)
$$\int_{bD} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) dS = \int_D (u \triangle v - v \triangle u) dV$$

25. Naj bo $K \subset (0, \infty) \times (0, \infty)$ neka krivulja med točkama $(1, 1)$ in $(2, 2)$. Določi funkcijo u tako, da bo integral $\int_K u(x, y)(y\, dx + x\, dy)$ neodvisen od izbire krivulje K.

Namig: Novi koordinati $t = xy$ in $s = \frac{x}{y}$.