Nakaj dodatnih nalog za 1. kolokvij iz ANALIZE IIb

1. Ploskev, podano s parametrizacijo $\vec{r}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi)$, presekamo z elipsoidom $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ in dobimo krivuljo K. Določi središče pritisnjenega kroga na krivuljo K v točki $(1, 0, z) \in K$.

2. Naj bo $a > 0$ in ploskev S dana z relacijama $x^2 + y^2 \leq a^2$ ter $az = xy$. Izračunaj površino ploskve S in pritisnjeno ravnino na rob ploskve S v točki $(a, 0, 0)$.

3. Naj bo $\vec{r}(t) = \left(3\int_0^t \cos\frac{\tau^2}{2}d\tau,\ 5\int_0^t \sin\frac{\tau^2}{2}d\tau,\ 4\int_0^t \cos\frac{\tau^2}{2}d\tau\right)$ prametrizacija krivuje K.
a) Parametriziraj krivuljo K z naravnim parametrom.
b) Pokaži, da je fleksijska ukrivljenost krivulje K sorazmerna z absolutno vrednostjo naravnega parametra.
c) Pokaži, da je krivulja K ravninska in določi ravnino v kateri leži.

4. Dana je parametrizacija ploskve $\vec{r}(u,v) = \left(\frac{(8u+2)^{3/2}}{12}, u^2 - v, f(u) + v\right)$, kjer je f zvezno odvedljiva funkcija.
(a) Določi funkcijo f tako, da bodo koordinatne krivulje na ploskvi pravokotne in $f(0) = 0$.
(b) Pri tako določeni funkciji pokaži, da potekajo vse pritisnjene ravnine na koordinatno krivuljo $v = 0$ skozi koordinatno izhodišče.
(c) Izračunaj ordinato (koordinato y) težišča dela ploskve, določenaga z relacijama $0 \leq u \leq 2$ in $0 \leq v \leq 2$.
(Opomba: Površinska gostota ploskve je konstantna.)

5. Naj bo $K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 5,\ x^2 - z^2 = 1\}$
(a) Dokaži, da je K gladka krivulja.
(b) Ali je množica K povezana?
(c) Poišči parametrizacijo krivulje K oblike $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), \mathrm{sh}\,(t))$ v okolici točke $A(-1, 2, 0)$ ter določi spremljajoči trieder in pritisnjeno ravnino v točki A.

6. Dana je krivulja $K \subset \mathbf{R}^3$, ki premore regularno dvakrat zvezno odvedljivo parametrizacijo, in $T_0 \in K$ izbrana točka na krivulji. Označimo z R_1 pritisnjeno ravnino krivulje K v točki T_0 in z R_2 ravnino skozi točko T_0, vzporedno tangenti in binormali krivulje K v točki T_0. Naj bo K_1 pravokotna projekcija krivulje K na ravnino R_1, K_2 pravokotna projekcija krivulje K na ravnino R_2 in κ fleksijska ukrivljenost krivulje K v točki T_0.

   Dokaži, da je fleksijska ukrivljenost krivulje K_1 v točki T_0 enaka κ in fleksijska ukrivljenost krivulje K_2 v točki T_0 enaka 0.

7. Naj bo $a > 0$. Valj z enačbo $x^2 + y^2 = a^2$ odreže od ploskve z enačbo $az = xy$ ploskev S. Izračunaj površino ploskve S.

8. Naj bo $a > 0$. Določi privlačno silo med točkasto maso m v koordinatnem izhodišču in homogeno ploskvijo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, mase M.

9. Naj bo vektorsko polje $\vec{R} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dano s predpisom $\vec{R}(x, y, z) = (2x^2 + z^2, xy + 2yz, z)$. Izračunaj pretok polja $\vec{R}$ skozi površino torusa s središčem v točki $T(x_0, y_0, z_0)$ in polmeroma a, b, $a < b$. Upoštevaš lahko, da je volumen torusa $V = 2\pi^2 a^2 b$.

10. Dano je vektorsko polje $\vec{R}(x, y, z) = (3x^2 + Ay^2, 2xy - z^2, Byz)$. Določi konstanti A in B tako, da bo polje $\vec{R}$ potencialno ter izračunaj njegov pretok skozi sfero z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 - 4y = 0$ in integral $\int_L \vec{R} d\vec{r}$, kjer je L gladek lok med točkama $(1, 1, 1)$ in $(2, 2, 2)$.

11. Naj bo krivulja C presek ploskev z enačbama $z = 2x - x^2 - y^2$ in $2z = y + 1$. Dano je vektorsko polje $\vec{f} \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\vec{f}(x, y, z) = (xz,\ yz,\ z^2)$.
(a) Izračunaj integral polja $\vec{f}$ vzdolž krivulje C, orientirane pozitivno glede na smer osi z.
(b) Pokaži, da je integral $\int_{(0,0,1)}^{(1,2,3)} (\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{f})\, d\vec{r}$ neodvisen od izbrane poti in ga izračunaj.

12. Naj bo S gladka zaključena ploskev in $\vec{a} \in \mathbf{R}^3$ izbran vektor. S pomočjo Gaussovega izreka izračunaj integral $\int_S |\vec{a} \times \vec{r}| \cos(\vec{a} \times \vec{r}, \vec{n}) dS$, kjer je $\vec{n}$ enotska zunanja normala ploskve S in $\cos(\vec{x}, \vec{y})$ označuje kosinus kota med vektorjema $\vec{x}$ in $\vec{y}$.

13. Naj bo $R > 0$ in $C \subset \mathbf{R}^3$ množica določena z enačbama $x^2 + y^2 = R^2$ ter $3y - 4z = -8$.
(a) Dokaži, da je C gladka krivulja (enorazsežna C^∞-mnogoterost).
(b) Uporabi Stokesov izrek in izračunaj integral $\int_C -3y dx - xz dy + yz^2 dz$.

14. Naj bo $D \subset \mathbf{R}^3$ območje z gladkim robom in prostornino V, $\vec{a} \in \mathbf{R}^3$ pa izbran vektor. Izračunaj integral $\int_{\partial D} (\vec{r} \times \vec{a}) \times d\vec{S}$. (Velja $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x}\vec{z})\vec{y} - (\vec{y}\vec{z})\vec{x}$.)

15. Naj bo $a > 0$. Valj z enačbo $x^2 + y^2 = a^2$ odreže od ploskve z enačbo $az = xy$ ploskev S.
a) Izračunaj površino ploskve S.
b) Izračunaj integral $\int_{\partial S} -y dx + (x + z) dy - y dz$, pri čemer orientacijo izbereš tako, da bo imela projekcija krivulje na ravnino xy pozitivno orientacijo.

16. Izračunaj integral $\int_K xz^2\, dx + x\, dy + x\, dz$, kjer je krivulja K podana z enačbama $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ter $x + z = 1$ in orientirana v pozitivni smeri gledano iz koordinatnega izhodišča.

17. Naj bo $\vec{F}(x, y, z) = (2y, z, x + \sin z)$, $a > 0$ in K presek ploskev z enačbama $x + y + z = 0$ in $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Izračunaj krivuljni integral $\int_K \vec{F} d\vec{r}$, pri čemer, krivuljo K orientiramo pozitivno gledano iz točke $(1, 1, 1)$.

18. Dani sta ploskvi $S_1 = \{(x,y,z) \mid x^2 - Rx + y^2 = 0\,,\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ in $S_2 = \{(x,y,z) \mid x^2 - Rx + y^2 \leq 0\,,\ x^2+y^2+z^2 = R^2\}$, kjer je $R > 0$. Naj bo $S = S_1 \cup S_2$ in preslikava $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dana s predpisom $\vec{F} = (x^2 + x\sin z, y^2 - 2yx + y^4, z + z^2)$. Izračunaj integral $\int_S \vec{F} d\vec{S}$, pri čemer izberi zunanjo smer normale na ploskev S.

19. Naj bo $a > 0$, $D = [0,a] \times [0,a] \times [0,a] \subset \mathbf{R}^3$, Π ravnina podana z enačbo $x + y + z = 2a$ in $K = \Pi \cap \partial D$. Izračunaj integral $\int_K (xy + 3z)dx + (z^2 + x^2)dy + (xz - 2z)dz$, pri čemer je orientacija krivulje K podana z vrstnim redom točk $(0,a,a)$, $(a,0,a)$ in $(a,a,0)$.

20. Naj bo krivulja $C \subset \mathbf{R}^3$ podana z enačbama $z = 2x - x^2 - y^2$ in $2z = y + 1$ ter vektorsko polje $\vec{f} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, dano s prepisom $\vec{f}(x,y,z) = (xz, yz, z^2)$.
a) Izračunaj integral polja $\vec{f}$ vzdolž krivulje C, orientirane pozitivno glede na smer osi z.
b) Pokaži, da je integral $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} (\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{f}) d\vec{r}$ neodvisen od izbrane poti in ga izračunaj.

21. Dano je vektorsko polje $\vec{f}(x,y,z) = (2y, z, x + e^{z^2})$. Izračunaj integral $\int_K \vec{f} d\vec{r}$, kjer je krivulja K podana z enačbama $x + y + z = 0$ in $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ter orientirana pozitivno, gledano iz točke $(0,0,1)$.

22. Valj D je dan z relacijama $x^2 + y^2 \leq 4$ in $0 \leq z \leq \frac{1}{4}$. Določi pretok vektorskega polja $\vec{f} = (-x^2 + y^2, y, (x^2 + y^2)z^2)$ skozi rob in plašč valja D.

23. Dano je vektorsko polje $\vec{f}(x,y,z) = (Ax^2y^2z, 2x^3yz, x^3y^n)$.

(a) Določi naravno število n in parameter $A \in \mathbf{R}$ tako, da bo polje $\vec{f}$ potencialno.

(b) Izračunaj integral polja $\vec{f}$ vzdolž poljubne krivulje med točkama $(1,1,3)$ in $(1,2,-1)$. Odgovor utemelji!

24. Dano je vektorsko polje $\vec{f}(x,y,z) = (-2xyz, \cos z - 1, yz^2)$.

a) Določi kako polje $\vec{g}$ oblike $\vec{g}(x,y,z) = (\alpha(z), \beta(x,y,z), \gamma(x))$, za katero je $\mathrm{rot}\,\vec{g} = \vec{f}$.

b) Izračunaj integral $\int_S \vec{f} d\vec{S}$, kjer je $S = \{(x, y, e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

25. Izračunaj pretok polja $\vec{f}(x,y,z) = ((x+y)^3, -2xy^2 + yz + y^2, -2xyz + z)$ skozi torus s polmeroma $0 < a < b$, katerega simetrijska os je os z in simetrijska ravnina ravnina xy.

26. Dani sta vektorsko polje $\vec{F} = (z, xz, y)$ in krivulja K, ki je presek ploskev $x^2 + y^2 = 1$ in $z = (x-2)^2 + (y-3)^2$. Krivuljo K orientiramo tako, da je njena projekcija na ravnino $z = 0$ orientirana pozitivno. Izračunaj integral $\int_K \vec{F}\, d\vec{r}$.

27. Naj bo krivulja K presek sfere z enačbo $|\vec{r}| = 1$ ter ravnine z enačbo $\vec{n}\vec{r} = -\frac{1}{2}$ in $\vec{f}(\vec{r}) = (\vec{n} \times \vec{r})$ vektorsko polje, pri čemer je $\vec{n}$ enotski vektor.
(a) Izračunaj rotor polja $\vec{f}$.
(b) Izračunaj krivuljni integral

$$\int_K (\vec{n} \cdot \vec{r})(\vec{n} \times \vec{r}) d\vec{r}.$$

Opomba: Orientacija krivulje K ni pomembna.

28. Naj bo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ harmonična funkcija, tj. funkcija, za katero velja $\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$. Dokaži, da za $r > 0$ velja $\frac{1}{4\pi r^2} \int_{S(0,r)} f \, dS = f(0,0,0)$. (Nasvet: Parametriziraj sfero $S(0,r)$ in s pomočjo odvajanja ter Gaussovega izreka dokaži, da je gornji integral neodvisen od r. Nato pošlji r proti 0.)