Domače naloge za 2. kolokvij iz ANALIZE IIb

1. Naj bo $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ holomorfna funkcija, ki ima v realnih številih realne vrednosti. Dokaži, da tedaj za vsak $z \in \mathbf{C}$ velja
$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$
(Nasvet: Dokaži najprej, da je funkcija $\overline{f(\overline{z})}$ holomorfna.)

2. Naj bo f holomorfna funkcija na polju $D \subset \mathbf{C}$. Označimo $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Denimo, da obstajajo konstante $a, b, c \in \mathbf{C}$, ki niso vse enake 0, in za katere velja
$$au + bv = c.$$
Pokaži, da je funkcija f konstantna.

3. Naj bosta $f, g\colon D \to \mathbf{C}$ holomorfni funkciji na območju D, za kateri je $f\overline{g} > 0$. Dokaži, da obstaja pozitivna konstanta c, da je $f = c\,g$.

4. Določi celo funkcijo f, za katero velja
$$(\operatorname{Re} f)(x + iy) = e^x((x + 1)\cos y - y \sin y)$$
in $f(i\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$.

5. Naj bo f neničelna holomorfna funkcija z lastnostjo
$$\arg(f(z)) = xy.$$
Določi funkcijo f!

6. Naj bosta $f, g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ taki holomorfni funkciji, da za vsak $z \in \mathbf{C}$ velja $|g(z)| \leq |f(z)|$. Dokaži, da obstaja taka konstanta $\alpha \in \mathbf{C}$, da je $|\alpha| \leq 1$ in $g = \alpha f$.

7. Določi vse možne razvoje oblike
$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$
kjer je
$$f(z) = \frac{1}{1 - z^2} + \frac{1}{3 - z}.$$

8. Naj bo f taka funkcija, holomorfna v okolici točke ∞, da za vsako naravno število n velja
$$f(n) = \frac{n^2 \sqrt[n]{e}}{1 + n^2}.$$
Določi funkcijo f.

9. Naj bo f funkcija holomorfna na okolici zaprtega kroga $K = \overline{D}(a,r) \subset \mathbf{C}$, ki na ∂K nima ničel, in $p \in \mathbf{N}$. Z ničlami funkcije f in njihovimi večkratnostmi izrazi integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)}z^p dz.$$

10. Holomorfno funkcijo

$$f(z) = \frac{z}{z^3 - 3z + 2}$$

razvij v Laurentovo vrsto okrog točke 1 ter izračunaj kompleksni integral

$$I = \int_{|z|=3} f(z)dz.$$

11. Dano je območje

$$D = \{z \in \mathbf{C}\,;\,\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}$$

in funkciji

$$f(z) = \frac{z - iz - 2}{1 - z}\ ,\quad g(z) = \frac{i}{(z+1)^3(z+1-i)}.$$

(a) Določi sliko $E = f(D)$.
(b) Določi Laurentovo vrsto za funkcijo g, ki konverira na množici E.

12. Naj bo $D \subset \mathbf{C}$ odprta množica in $a_0, \ldots, a_n : D \to \mathbf{C}$ zvezne funkcije. Za $w \in D$ definiramo polinom p_w s predpisom

$$p_w(z) = a_n(w)z^n + \cdots + a_0(w).$$

Naj bo $w_0 \in D$ taka točka, da ima polinom p_{w_0} same različne ničle in $a_n(w_0) \neq 0$. Pokaži, da obstaja taka okolica U točke w_0, da ima polinom p_w za vsak $w \in U$ same različne ničle.

13. Izračunaj kompleksni integral

$$\int_{|z-i|=2}\frac{e^z dz}{z^2 - 2z + 2}.$$

14. Naj bo

$$D = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Re}(z) \in (-1,1), \operatorname{Im}(z) \in (-1,3)\} \subset \mathbf{C}.$$

Izračunaj kompleksni integral

$$\int_{\partial D}\frac{\operatorname{ch}\frac{1}{\mathrm{z}}}{\mathrm{z}^3 + 4\mathrm{z}}dz.$$

15. Izračunaj kompleksni integral

$$\int_{|z-1|=2} \frac{e^{\pi z}-1}{\sin^2 z(1+z^2)} dz.$$

16. Izračunaj integrala

$$\int\limits_{|z-i|=6/5} \frac{dz}{z^3(z^2+1)} \qquad \text{in} \qquad \int\limits_{|z-2|+|z-1|=4} z^2 \cos\tfrac{1}{z-2}\, dz.$$

17. S pomočjo kompleksne integracije izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10} dx.$$

18. Izračunaj kompleksni integral

$$\int_{|z|=2} (z+1)^{-2} e^{1/z} dz.$$

19. Izračunaj integral

$$\int_{|z-1|=2} \frac{\sin(1/z)}{z-a} dz,$$

za $a \notin \{z \mid |z-1|=2\}$.

20. Naj bosta g, f celi funkciji, Z množica ničel funkcije f in $D \subset \mathbf{C}$ taka omejena odprta množica s kosoma gladkim robom, da je $Z \cap \partial D = \emptyset$. Označimo z $m(a)$ večkratnost ničle $a \in Z$. Pokaži, da velja

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{g(z) f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in Z \cap D} m(a) g(a).$$

Nato izračunaj integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz,$$

kjer je $f(z) = z^n + \cdots + a_0$ in $Z \subset D$.

21. Izračunaj kompleksni integral

$$\int_{|z|=1/2} \frac{z^2 e^{1/z}}{1-z^2}\, dz\,!$$

22. Naj bo $x \in (0,1)$. S pomočjo kompleksne integracije izračunej integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{x-\cos t}{1-2x\cos t+x^2}\, dt.$$

23. Izračunaj integral

$$\int_{|z-i|=2} \frac{e^z dz}{z^2 - 2z + 2}.$$

24. Izračunaj kompleksni integral

$$\int_{|z-1|=3/2} \left(\frac{e^{\pi z}}{z^2 + \frac{3i}{2} z + 1} + (z^3 + z) \cos(z^{-1}) \right) dz.$$

25. a) Izračunaj kompleksni integral

$$I = \int_{|z+2|=6} \frac{(z^2+1)^6}{2^6 i z^7} dz.$$

b) Dokaži, da velja

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^6 x dx.$$

26. Prevedi integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 4\sin\varphi}$$

na kompleksni integral po enotski krožnici in ga izračunaj.

27. Izračunaj kompleksni integral

$$\int_{|z|=2} (z+i)^{-1} e^{1/z} dz.$$

28. S pomočjo Laplaceove transformacije reši diferencialno enačbo

$$y'' - 4y' + 9y = t$$

pri začetnih pogojih $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$.

29. Reši sistem enačb

$$x' - x + 2y = -e^{2t}$$

$$y' + 2t = 2x + y,$$

kjer je $x(0) = 1$ in $y(0) = -2$.

30. Preslikaj območje

$$D = \{x + iy \,|\, x^2 - 4x + y^2 < 0,\, x^2 + y^2 - 6x + 8 > 0\}$$

biholomorfno na odprt enotski disk.

31. Dano je območje $D \subset \mathbf{C}$,

$$D = \{x + iy \,|\, x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 < 0\,,\ x^2 + y^2 - 4y - 2x + 4 < 0\}.$$

Določi biholomorfno preslikavo, ki območje D preslika na enotski krog $\{z \,|\, |z| > 1\}$.

32. Dano je območje $D \subset \mathbf{C}$,

$$D = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z - 1| > 1\,,\ |z - 2| < 2\,,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

Poišči zaporedje biholomorfnih preslikav, ki območje D preslikajo na odprt enotski krog.

33. Dano je območje v kompleksni ravnini,

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1,\ \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) < 0\}$$

in funkcija

$$\phi(z) = \frac{(1 - i)z}{z - i}.$$

(a) Določi sliko $E = \phi(D)$.

(b) Izračunaj

$$\int_{bE} z e^{\frac{1}{2z-1}}\, dz.$$