Adjungirana preslikava

126. V prostoru $\mathbb{R}^3$ so dane točke

$$A(1,1,0), B(0,1,1), C(0,2,-1), D(2,1,1), E(1,1,1), F(3,6,2).$$

Naj bo A linearna preslikava $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s pozitivno determinanto, ki preslika točko E v točko F in daljico AB na daljico CD. Kam preslikava A^* (glede na običajni skalarni produkt v $\mathbb{R}^3$) preslika daljico AB?

127. Naj bo $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sebi adjungirana linearna preslikava, ki ima lastno vrednost 2. Za vsak vektor u, ki leži na ravnini $x - y + z = 0$ velja $Au = u$. Poišči njeno matriko v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

128. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ -i & 1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ali je ta matrika sebi adjungirana, ali je unitarna, ali je normalna?

129. Dana je matrika

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ali je ta matrika sebi adjungirana, ali je ortogonalna, ali je normalna?

130. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 2 & -1 \\ -2 & i & i \\ 1 & i & i \end{bmatrix}.$$

Ali je ta matrika sebi adjungirana, ali je unitarna, ali je normalna?

131. V prostoru $\mathbb{R}^2$ je dan skalarni produkt

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2.$$

Ali je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

v tem skalarnem produktu sebi adjungirana, ali je ortogonalna, ali je normalna?

132. Določi število a tako, da bo matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$$

normalna. Ali je tako dobljena matrika sebi adjungirana, ali je ortogonalna?

133. Določi manjkajoča števila v matriki A tako, da bo unitarna.

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2i & * & * \\ 2i & -i & * \\ 1 & -2 & -2i \end{bmatrix}.$$

Ali je tako dobljena matrika sebi adjungirana, ali je normalna?

134. Dana je matrika

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da predstavlja rotacijo. Izračunaj os in kot rotacije.

135. Dana je matrika

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da predstavlja zrcalno rotacijo. Izračunaj os in kot rotacije ter zrcalno ravnino.

136. Dani sta linearni preslikavi $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. A je zrcaljenje čez premico $y = 0$, B pa zrcaljenje čez premico $y = \sqrt{3}x$. Poišči njuni matriki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^2$. Izračinaj produkt AB. Pokaži, da je AB rotacija. Za kakšen kot rotira?

137. Dana je matrika

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da je pozitivno definitna. Poišči tako unitarno matriko U, da bo matrika U^*AU diagonalna.

138. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ dva je dan skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle := p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)\ .$$

Sebi adjungiran operator $A\colon\ \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ ima eno lastno vrednost enako 1, drugi dve pa sta enaki 2. Lastni podprostor za 2 je jedro funkcionala

$$f\colon\ \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}\,, \quad f(p) = p(0) + p'(1)\,.$$

Napiši matriko za A v bazi $\{1, x, x^2\}$.

139. Prostor realnih polinomov stopnje največ dva je opremljen s skalarnim produktom

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Naj bo $A\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ normalna preslikava, katere zaloga vrednosti je napeta na vektorje $2 + 3x + x^2$, $1 - x + 2x^2$ in $1 - 6x + 5x^2$. Določi jedro preslikave A.

140. Naj bo V realen vektorski prostor s skalarnim produktom in naj bosta $A, B\colon V \to V$ linearni preslikavi.

    (a) Če sta A in B sebiadjungirani in velja $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$ za vsak $x \in V$, potem je $A = B$.

    (b) Poišči taki A, B, da je $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$ za vsak $x \in V$ in $A \neq B$.

141. Naj bo V unitaren prostor in $A : V \to V$ linearna preslikava. Dokaži: če velja

$$A^2 = AA^* = A^*A,$$

potem je A sebi adjungirana.

142. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ pozitivno definitna matrika in $x \in \mathbb{C}^n$ poljuben vektor. Dana je bločna matrika

$$B = \begin{bmatrix} A & x \\ x^* & 0 \end{bmatrix}.$$

    (a) Dokaži, da je matrika B podobna matriki

$$C = \begin{bmatrix} D & y \\ y^* & 0 \end{bmatrix},$$

    kjer je D diagonalna matrika, $y \in \mathbb{C}^n$ pa nek vektor.

    (b) Dokaži, da je $\det B \leq 0$.

    (c) Dokaži, da je $\det B = 0$ natanko tedaj, ko je $x = 0$.

143. Na prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ definirajmo skalarni produkt:

$$\langle p, q\rangle := \sum_{i\in\{-1,0,1\}} p(i)q(i).$$

Linearne preslikava $A\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ naj bo podana s predpisom

$$(A\,p)(x) := \frac{1}{2}\left(p'(x) + 6\int_0^1 p(t)\,dt\right)x.$$

Določi $[A;\Sigma,\Sigma]$, kjer je $\Sigma = \{1, x, x^2\}$, in izračunaj $A^*(x+1)$.

144. Za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 2i & i & * \\ * & * & -1 \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$$

naj velja $A^* = -A$. Število i naj bo njena dvojna lastna vrednost. Določi neznana števila v matriki A. Pokaži, da je A podobna neki diagonalni matriki D. Določi D.

145. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & * \\ 1 & 1 & * & * \\ -1 & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Določi manjkajoča števila v matriki A tako, da bo normalna in bo imela vse lastne vrednosti na krožnici v kompleksni ravnini s središčem v točki 3 in polmerom 2.

146. V prostoru $\mathbb{R}^4$ imamo standarden skalarni produkt. Dana sta podprostora

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4);\ x_1 = x_2 = x_3 = x_4\},$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4);\ x_1 + x_2 + x_3 = x_4\},$$

Naj bo P projektor na V vzdolž U. Ali je P^* projektor? Če je, kam in vzdolž česa projecira?

147. Naj bo V končnorazsežen kompleksen vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle .,.\rangle$ in $a, b \in V$ dana vektorja.
(a) Pokaži, da je preslikava $A : V \to V$

$$Ax = \langle x, a\rangle b$$

linearna in določi preslikavo A^*.
(b) Kdaj je preslikava A sebi adjungirana?
(c) Kdaj je preslikava A normalna?

148. Naj bosta x, y neničelna vektorja evklidskega prostora. Pokaži, da taka pozitivno definitna preslikava A, da je $Ax = y$ natanko takrat, ko je $\langle x, y \rangle > 0$.

149. (a) Poišči normalni matriki $A, B \in \mathbb{C}^{2,2}$ za kateri matrika AB ni normalna.
(b) Naj bosta $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ normalni matriki, za kateri velja $AB^* = B^*A$. Dokaži, da je matrika AB normalna.