Vaje: Determinante

1. Po definiciji determinante izračunaj naslednje determinante.

$$L = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & & \iddots & a_{2,n-1} & * \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & * & \cdots & \cdots & * \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$D(t) = \begin{vmatrix} -t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & -t & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & -t \end{vmatrix}$$

2. Izračunaj determinanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Števila 20604, 53227, 25755, 20927 in 78421 so deljiva s 17. Dokaži, da je determinanta

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

deljiva s 17.

4. Dokaži, da za poljubne realne polinome $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}_{n-2}[x]$ in poljubna realna števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ velja

$$\begin{vmatrix} p_1(a_1) & p_1(a_2) & \cdots & p_1(a_n) \\ p_2(a_1) & p_2(a_2) & \cdots & p_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n(a_1) & p_n(a_2) & \cdots & p_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

5. Za poljubna realna števila $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ izračunaj determinanti

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & \cdots & 1+a_1b_n \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & 1+a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+a_nb_1 & 1+a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}.$$

6. Izračunaj determinanti velikosti $n \times n$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

7. Za dani realni števili a, b izračunaj determinanto velikosti $2n \times 2n$

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

8. Reši enačbi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ t+1 & 2 & t+3 & 4 \\ 1 & 3+t & 4+t & 5+t \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 0 \text{ in } \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

9. Naj bodo $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}_2[x]$ realni polinomi. Izpelji pravilo za odvajanje determinante in nato dokaži, da je determinanta

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} p_1(x) & p_1(x) & p_1(x) \\ p_1'(x) & p_1'(x) & p_1'(x) \\ p_1''(x) & p_1''(x) & p_1''(x) \end{vmatrix}$$

neodvisna od x. Posploši to trditev.

10. Dan je polinom

$$p(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & x & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & x & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & x & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & x \end{vmatrix}.$$

Izračunaj odvoda $p^{(5)}(0)$ in $p^{(6)}(0)$.

11. Naj bo A kvadratna realna matrika velikosti $n \times n$ in A^p njena prirejenka. Dokaži da velja:

a) $\det(A^p) = (\det A)^{n-1}$

b) $(A^p)^p = (\det A)^{n-2} A$

12. Naj bo A kvadratna realna matrika velikosti $n \times n$ z elementi a_{ij} in k neko neničelno realno število. Dokaži, da za matriko B z elementi $b_{ij} = k^{i-j} a_{ij}$ velja

$$\det B = \det A.$$

13. Za realna števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ izračunaj Vandermondovo determinanto

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$