

Grupe, kolobarji, obsegi

31. Ali je množica

$$\{a + b\sqrt{3}; a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\}$$

grupa za množenje?

32. Na potenčni množici dane množice M definiramo simetrično razliko množic s pravilom:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Pokaži, da je potenčna množica za dano operacijo grupa.

33. Naj za $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ velja $ad - bc = 1$. V množici $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ smiselno definiramo operacije s številom ∞ (tako, da so ustrezna pravila skladna z limitami).

(a) Pokaži, da je vsaka preslikava oblike

$$f: \mathbb{R} \cup \infty \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty, \quad f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

bijekcija.

(b) Pokaži, da vse možne preslikave iz točke (a) tvorijo grupo za komponiranje preslikav.

34. Pokaži, da množica ostankov pri delitvi s 6, označimo jo z \mathbb{Z}_6 , ni grupa za množenje; množica $\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$ pa je multiplikativna grupa, izomorfna aditivni grupi \mathbb{Z}_6 .

35. Pokaži, da je grupa $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ izomorfna grupi simetrij pravokotnika, ni pa izomorfna grupi \mathbb{Z}_4 .

36. Dopolni tabelici seštevanja in množenja tako, da dobiš kolobar:

$+$	a	b	c	d	\cdot	a	b	c	d
a	a		c		a	a	a	a	a
b	b	c			b	a	b		
c			a		c	a			c
d				c	d	a	d	c	

37. Naj bo

$$\begin{aligned} G &= \{z \in \mathbb{C}; z = 2^k (\cos(m\pi\sqrt{2}) + i \sin(m\pi\sqrt{2})), k, m \in \mathbb{Z}\}, \\ H &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

- (a) Pokaži, da je G podgrupa v grupi $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ neničelnih kompleksnih števil za običajno množenje.
- (b) Pokaži, da je H podgrupa v aditivni grupi $(\mathbb{R}^2, +)$ ravninskih vektorjev za običajno seštevanje po komponentah.
- (c) Pokaži, da je preslikava $f: H \rightarrow G$, podana s pravilom

$$(x, y) \mapsto 2^x (\cos(y\pi\sqrt{2}) + i \sin(y\pi\sqrt{2})),$$

izomorfizem grup G in H .

38. Dani sta grupi $(G, *)$ in (H, \circ) . V množici $G \times H$ definiramo operacijo

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \circ h_2) .$$

Pokaži:

- (a) Množica $G \times H$ je grupa za to operacijo.
 - (b) Grupa $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ni izomorfna grupi \mathbb{Z}_4 .
 - (c) Grupa $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ je izomorfna grupi \mathbb{Z}_{10} .
39. Naj bo $(G, +)$ komutativna grupa, A pa poljubna množica. Naj bo $f: G \rightarrow A$ bijektivna preslikava. Dokaži, da je A komutativna grupa za operacijo

$$s \circ t = f(f^{-1}(s) + f^{-1}(t)).$$

Dokaži, da sta grupi $(G, +)$ in (A, \circ) izomorfni.

40. Sestavi tabelo za seštevanje, množenje in invertiranje v obsegu \mathbb{Z}_7

41. Izračunaj inverz elementa 17 v obsegu \mathbb{Z}_{37}