

Jordanova kanonična forma

100. Poišči Jordanovo kanonično formo matrike

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}.$$

Kaj je prehodna matrika?

101. Poišči Jordanovo kanonično formo matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kaj je prehodna matrika?

102. Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Poišči Jordanovo kanonično formo matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a+1 & -a-2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kaj je prehodna matrika?

103. Določi Jordanovo kanonično formo matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kaj je prehodna matrika?

104. Poišči Jordanovo kanonično formo in prehodno matriko za matriko

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

105. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 2a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & 2a-1 & -a \\ 0 & 0 & 4a & -1-2a \end{bmatrix}.$$

Določi Jordanovo kanonično formo matrike A v odvisnosti od parametra a . Za $a = 0$ določi še prehodno matriko.

106. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2a - 1 & a \\ -1 & 2 & 4a & 2a + 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči njeno Jordanovo kanonično formo v odvisnosti od parametra a . Za $a = 0$ poišči tudi prehodno matriko.

107. O linearni preslikavi $A: \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^{10}$ vemo naslednje: edini lastni vrednosti sta 1 in 2. Lastni podprostor za 1 je trirazsežen, lastni podprostor za 2 je dvorazsežen. Velja še

$$\text{rang}(A - I)^5 = \text{rang}(A - I)^4 = 3.$$

Kolikšna je razsežnost jedra preslikave $(A - I)^2$? Napiši vse možne Jordanove kanonične forme za A .

108. Linearna preslikava A ima karakteristični in minimalni polinom

$$\Delta_A(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^6, \quad m_A(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2(\lambda - 1).$$

Poleg tega velja še:

$$\dim \ker(A^2 - I) = 7, \quad \dim \ker(A^2 - I)^2 = 10.$$

Poišči karakteristični in minimalni polinom preslikave A^2 ter Jordanovo kanonično formo preslikav A^2 in A .

109. Linearna preslikava A , ki deluje na 11-razsežnem prostoru ima minimalni polinom $m(\lambda) = \lambda^3(\lambda^2 - 1)^2$. Zanj velja

$$\dim(\ker(A - I)^2) = \dim(\ker(A + I)^2) = 3.$$

Določi karakteristična polinoma preslikav A in A^2 , Jordanovo kanonično formo preslikave A^2 , ter $\dim(\ker A^2)$ in $\dim(\ker(A^2 - I))$.

110. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj A^{100} .

111. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj $A^{11} + A^4 + A^{2000}$.

112. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -7 \\ 14 & -6 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko B , za katero velja $B^3 = A$.

113. Izračunaj $\exp(A)$ za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

114. Matrika $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ je spodnjetrokotna matrika (to je $a_{ij} = 0$ za $i < j$), ima diagonalne elemente paroma različne, velja pa

$$e^{a_{11}} = e^{a_{22}} = \dots = e^{a_{nn}}.$$

Izračunaj $\exp(A)$.

115. Dana sta matrika in vektor

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Dokaži, da sta vektorja $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$

$$u = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$$

lastna vektorja bločne matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{bmatrix}.$$

Določi Jordanovo kanonično formo matrice A .