

Vaje: Jordanska forma

1. Kompleksna kvadratna matrika A ima natanko 5 neodvisnih lastnih vektorjev, njen karakteristični polinom je $p(x) = (x^2 - 4x + 3)^3(x - 1)$, njen minimalni polinom pa je $m(x) = (x^2 - 4x + 3)^2$. Določi jordanško formo matrike A .

2. Določi jordanško formo in ustrezno prehodno matriko za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{11 \times 11}$ matrika, za katero velja $\dim(\text{Ker } A^4) = 11$, $\dim(\text{Ker } A^3) = 10$, $\dim(\text{Ker } A^2) = 7$. Določi jordanško formo matrike A in $\dim(\text{Ker } A)$.

4. Določi jordanško formo in ustrezno prehodno matriko za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -10 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 17 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Zapiši še minimalni polinom matrike A .

5. Določi jordanško formo in ustrezno prehodno matriko za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zapiši minimalni polinom matrike A .

6. Dokaži, da za kompleksno kvadratno matriko A velja

$$J(A) = J(A^T).$$

7. Naj bo A kompleksna kvadratna matrika. Določi jordanško formo matrike A^2 , če poznaš jordanško formo matrike A .
8. Določi jordanško formo in ustrezno prehodno matriko za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. Izračunaj e^A , za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

10. Naj bo A kvadratna kompleksna matrika. Dokaži trditvi:
- Velja $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.
 - A se diagonalizira natanko tedaj, ko se diagonalizira matrika e^A .