Vaje: kolobarji, obsegi, vektorski prostori, linearne preslikave

1. V množico $\mathbb{R}$ uvedemo operaciji

$$a \oplus b = a + b + 1,\ a \otimes b = a + b + ab.$$

   (a) Ali je $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ kolobar, ali je obseg?
   (b) Reši enačbo $(2 \oplus x) \oplus (2 \otimes x) = 12$.

2. V množico $\mathbb{R}^2$ uvedemo operaciji

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v),\ \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, y).$$

   Ali je $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$?

3. V množico $M = \{a\}$ uvedemo operaciji

$$a + a = a,\ \lambda \cdot a = a.$$

   Ali je $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor nad nekim obsegom F?

4. V množico $V = (0, \infty)$ uvedemo operaciji

$$a \oplus b = ab,\ \lambda \cdot a = a^\lambda.$$

   Ali je V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$?

5. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ je opremljen s standardnim seštevanjem in množenjem s skalarjem. Katere od naslednjih podmnožic so podprostori: $(x = (x_1, ..., x_n))$

   (a) $\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 \in \mathbb{Z}\}$
   (b) $\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_2 = 0\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 + x_2 = 1\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R}^n;\ 3x_1 - 2x_2 = 0\}$
   (d) $\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 = x_3 = x_5 = ...\}$
   (e) $\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 \geq 0\}$
   (f) $\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 + x_3 = x_2 + x_4\}$

6. Množico $\mathcal{F}$ realnih funkcij $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opremimo z operacijama po točkah. Katere od naslednjih množic so podprostori:

   (a) $\{f \in \mathcal{F};\ f \text{polinom}\}$
   (b) $\{f \in \mathcal{F};\ f \text{polinom stopnje } 4\}$
   (c) $\{f \in \mathcal{F};\ f \text{polinom stopnje največ } 2\}$
   (d) $\{f \in \mathcal{F};\ f(0) = 0\}$
   (e) $\{f \in \mathcal{F};\ f(x) = f(1-x)\ \forall x\}$

7. Naj bo $\vec{a}$ dan vektor in $A\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preslikava, podana s pravilom

$$A\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{a} + \vec{x} \times \vec{a} - 2\vec{x}.$$

   Pokaži, da je preslikava A linearna in poišči njeno jedro v primeru, ko je $\vec{a} = (1, 0, 1)$.

8. Če so linearno neodvisne slike linearne preslikave, morajo biti tudi originali.

9. Naj bo $A\colon\ V \to V$ linearna preslikava. Pokaži:

   (a) $\ker A \subseteq \ker A^2 \subseteq \ker A^3 \subseteq ...$
   (b) $\operatorname{im} A \supseteq \operatorname{im} A^2 \supseteq \operatorname{im} A^3 \subseteq ...$

10. Prepričaj se, da so naslednje preslikave $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearne in opiši njihov geometrijski učinek (preslikaj kvadrat z oglišči $(0,0), (1,0), (0,1)$ in $(1,1)$).

    a) $A(x, y) = (y, x)$
    b) $A(x, y) = (x, ay)$ za $a \in \mathbb{R}$
    c) $A(x, y) = (x, 0)$
    d) $A(x, y) = (x, x)$

11. Naj bosta $U, V \subset W$ linearna podprostora prostora W in $T : W \to W$ linearna preslikava. Dokaži, da velja

    a) $T(U + V) = T(U) + T(V)$
    b) $T(U \cap V) \subset T(U) \cap T(V)$

    Poišči primer, ko v točki b) ne velja enačaj.

12. Naj bo $A : V \to V$ linearna preslikava.

a) Dokaži, da velja $A^2 = 0$ natanko tedaj, ko je $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} A$.

b) Dokaži: Če je $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Ker} A = \{0\}$, za vsako naravno število n velja $\operatorname{Ker} A^n = \operatorname{Ker} A$.

13. Naj bo prostor W direktna vsota podprostorov U in V. Dokaži:

a) Obstaja natanko ena linearna preslikava $P : W \to W$, za katero velja $Pu = u$ pri vsakem $u \in U$ in $Pv = 0$ za vsak $v \in V$. Preslikavo P imenujemo *projektor na prostor U vzdolž prostora V*.

b) $\operatorname{Ker} P = V$ in $\operatorname{Im} P = U$.

c) $P^2 = P$

d) Naj bo Q projektor na prostor V vzdolž prostora U. Tedaj velja $PQ = QP = 0$ in $P + Q = id_W$.

14. Naj bodo $U_1, U_2, \ldots, U_n$ vektorski podprostori prostora U. Dokaži, da je vsota prostorov $V = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ direktna vsota natanko tedaj, ko za vsak $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ velja

$$U_k \cap (U_1 + \cdots + U_{k-1} + U_{k+1} + \cdots + U_n) = \{0\}.$$

15. Naj bo V vektorski prostor in $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ in

$$v_1' = v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \cdots + \lambda_m v_m.$$

a) Dokaži, da so vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_m$ linearno neodvisni natanko tedaj, ko so linearno neodvisni vektorji $v_1', v_2, \ldots, v_m$.

b) Dokaži, da je linearna ogrinjača vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_m$ enaka linearni ogrinjači vektorjev. $v_1', v_2, \ldots, v_m$.

16. a) Dani so vektorji $v_1 = (2, 3, -1, 4)$, $v_2 = (1, 2, 1, 2)$, $v_3 = (4, 7, 1, 8)$ in $v_4 = (1, 1, -2, 2)$. Ali so vektorji v_1, v_2, v_3, v_4 linearno neodvisni? Poišči kako bazo njihove linearne ogrinjače.

b) Ali vektorja $(1, 1, 0, 0)$ in $(1, 0, 1, 1)$ razpenjata isti prostor kot vektorja $(2, -1, 3, 3)$ in $(0, 1, -1, -1)$?

17. Dana je množica $V \subset \mathbb{R}^6$,

$$V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_6) \,|\, x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\,,\; x_1 - x_4 = 0\}.$$

Dokaži, da je V vektorski podprostor, poišči kako bazo za V in določi njegovo dimenzijo.

18. Dana sta vektorska podprostora $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^3$,

$$V_1 = \mathcal{L}\{(1,2,1),(1,1,-1),(1,3,3)\}\,,\; V_2 = \mathcal{L}\{(2,3,-1),(1,2,2),(1,1,-3)\}.$$

Določi baze in dimenzije prostorov V_1, V_2, $V_1 + V_2$ in $V_1 \cap V_2$.

19. Dana sta vektorska podprostora $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^5$,

$$V_1 = \mathcal{L}\{(1,1,1,1,1),(1,0,0,0,-1)\}\,,\; V_2 = \mathcal{L}\{(-1,-1,0,0,1),(3,2,2,2,1),(2,1,2,2,2)\}.$$

Določi baze in dimenzije prostorov V_1, V_2, $V_1 + V_2$ in $V_1 \cap V_2$.

20. Dana sta vektorska podprostora $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}_4[x]$,

$$V_1 = \mathcal{L}\{x^4+x^2+1, -x^4+x^3+x^2-x, -x^4+2x^3\}\,,\; V_2 = \{p \in \mathbb{R}_4[x] \,|\, p'(1) = p(1) = 0\}.$$

Določi baze in dimenzije prostorov V_1, V_2, $V_1 + V_2$ in $V_1 \cap V_2$.