

Vaje: Lastne vrednosti in lastni vektorji

1. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Preslikava $A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ je podana s predpisom

$$A(x, y, z, u) = (z, z, x + y, u).$$

Poišči pravilo za A^{2010} .

3. Izračunaj A^{2009} za

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -13 & 2 & 3 \\ -21 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

4. Naj bo V končno razsežen vektorski prostor in A endomorfizem V . Vemo, da je vsak $v \in V$ lastni vektor za A . Pokaži, da je A večkratnik identitete.
5. Naj bo v lastni vektor za A . Pokaži, da je v lastni vektor tudi za A^k . Pri kateri lastni vrednosti? Določi lastne vrednosti
 - (a) nilpotenta ($A^k = 0$ za dovolj velik $k \in \mathbb{N}$.)
 - (b) idempotenta ($A^2 = A$.)
6. Naj bo $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}$. Določi lastne vrednosti in lastne vektorje za A .
7. Določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = [a_{ij}]$ velikosti $n \times n$, ki ima vse elemente razen $a_{11} = a_{22} = 2$ in $a_{12} = a_{21} = 0$ enake 1.
8. Določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ ? & ? & ? \\ -1 & -7 & 1 \end{bmatrix},$$

če veš, da je podobna matriki

$$A = \begin{bmatrix} -11 & -8 & 0 \\ 12 & 9 & 0 \\ 24 & 18 & -1 \end{bmatrix}.$$

9. Preslikava A ima same različne lastne vrednosti. Pokaži, da se da diagonalizirati vsaka matrika, ki z njo komutira.
10. Za neko naravno število m velja $A^m = I$. Pokaži, da se da A diagonalizirati.
11. Določi minimalni in karakteristični polinom kvadratne matrike,
 - (a) ki ima na vseh mestih same enke.
 - (b) ki ima rang 1.
12. Matrika A je podobna diagonalni matriki D , ustrežna prehodna matrika je P . Pokaži, da je tudi matrika

$$B = \begin{bmatrix} A & -A \\ -A & A \end{bmatrix}$$

podobna diagonalni matriki in določi ustrezno prehodno matriko.

13. Naj bo $p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$ nek polinom nad obsegom \mathcal{O} . Dokaži, da je p minimalni polinom matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Določi še karakteristični polinom matrike A .