

## Lastne vrednosti in lastni vektorji

87. Poišči lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

88. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

89. Pokaži, da sta vektorja  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$  in  $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$  lastna vektorja matrike

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

za vsaka  $a, b \in \mathbb{R}$ . Kaj sta lastni vrednosti?

90. Za katere vrednosti  $a \in \mathbb{R}$  ima matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

realne lastne vrednosti? Za  $a = -2$  poišči še lastne vektorje.

91. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

92. Poišči matriko  $A$ , ki ima karakteristični polinom

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Za tako dobljeno matriko poišči še lastne vrednosti in lastne vektorje.

93. Naj bodo  $a_1, a_2, \dots, a_n$  dani linearno neodvisni vektorji iz  $\mathbb{R}^n$ . O linear ni preslikavi  $A$  vemo:

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n;$$

$$Aa_1 = a_2, A^2a_1 = a_3, \dots, A^{n-1}a_1 = a_n, A^n a_1 = a_1.$$

Določi lastne vrednosti, lastne vektorje in karakteristični polinom preslikave  $A$ .

94. Matrika

$$A = \begin{bmatrix} 5 & * & * \\ -4 & * & * \\ 0 & * & 2 \end{bmatrix}$$

ima lastne vektorje

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Določi matriko. Kaj so njene lastne vrednosti?

95. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ali je podobna kakšni realni zgornje trikotni matriki?

96. Pokaži, da je linearna preslikava, ki ima v standardni bazi prostora  $\mathbb{R}^3$  matriko

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

projekcija. Poišči bazo, v kateri ima ta projekcija matriko

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

97. Dana je preslikava  $\mathcal{F}: \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$

$$\mathcal{F}X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Določi njene lastne vrednosti in lastne vektorje.

98. Za realni  $2 \times 2$  matriki

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

naj bo

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} ax & bx & ay & by \\ cx & dx & cy & dy \\ az & bz & at & bt \\ cz & dz & ct & dt \end{bmatrix}.$$

Pokaži: če je  $\lambda$  lastna vrednost za  $A$  in  $\mu$  lastna vrednost za  $B$ , potem je  $\lambda\mu$  lastna vrednost za  $A \otimes B$ .

99. Naj bosta  $a$  in  $b$  linearne neodvisne vektorje iz  $\mathbb{R}^n$  in matrika  $C = ab^\top + ba^\top$ . Pokaži, da je  $\text{Lin}\{a, b\}^\perp$  lastni podprostor matrike  $C$  za lastno vrednost 0. Določi še ostale lastne vrednosti in lastne vektorje.