Vaje: Matrike

1. Ugani rezultat, nato pa dokaži z indukcijo:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n; n \in \mathbb{N}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n; n \in \mathbb{N}$

2. Pokaži, da je množica

$$\left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x-y & x+z \\ y & x-z & x \end{bmatrix}; \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

   vektorski podprostor v prostoru matrik $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ in določi njegovo bazo.

3. Pokaži, da je množica

$$\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}); \; A^\top = A\}$$

   vektorski podprostor v prostoru matrik $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ in izračunaj njegovo razsežnost.

4. Reši kvadratno enačbo

$$X^2 + BX + C = 0,$$

   pri čemer je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Naj bosta $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ in $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ matriki za kateri velja: vsota vsake vrstice A je a in vsota vsake vrstice B je b. Pokaži, da ima tudi njun produkt AB konstanto vsoto vrstic.

6. Za kvadratno matriko A je *sled matrike* A, tr A, definirana kot vsota njenih diagonalcev.

   (a) Pokaži, da je tr $(AB) =$ tr (BA).

(b) Reši matrično enačbo $AX - XA = I$.

7. Pokaži, da matrike oblike $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ tvorijo grupo za množenje matrik. Kakšen je njen geometrijski pomen?

8. Pokaži, da je množica matrik, ki komutirajo z matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

vektorski podprostor in določi njegovo bazo.

9. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da sta množici

$$\mathcal{A} = \{X \in C;\ AX = XA\} \text{ in } \mathcal{B} = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R});\ BX = XB\}$$

vektorska podprostora v prostoru $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ in določi baze prostorov $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ in $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

10. Naj bodo $s, t, u \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$. Definirajmo matrike

$$M(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix},\ N(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix},\ P(u) = \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da je matrika X oblike $M(s)N(t)P(u)$ za primerne s, t, u natanko tedaj, ko je njena determinanta enaka 1 in je njen levi vogalni element različen od nič.

11. S pomočjo Gaussovega postopka določi inverza matrik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

in

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{bmatrix},$$

za tista realna števila a, b, c, za katera inverz obstaja.

12. Dana je linearna preslikava $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, ki ima v standardnih bazah matriko
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$
Določi bazi jedra in slike ter določi $A(1, -1, 1, 1)$.

13. Linearna preslikava $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom
$$A(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 6x_1 - 4x_2 - 2x_3, -3x_1 + 2x_2 - x_3).$$
Zapiši matriko preslikave A v standardnih bazah in določi bazi jedra in slike ter določi $A(1, -1, 1, 1)$.

14. Za linearno preslikavo $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ velja $A(1, 1) = (0, 1, 2)$ in $A(-1, 1) = (2, 1, 0)$. Določi matriko preslikave A v standardnih bazah.

15. Naj bo A zasuk realne ravnine za kot $\frac{\pi}{4}$ okrog izhodiš ca. Zapiši matriko preslikave A in določi $A(1, 2)$

16. Dana sta linearno neodvisna vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ in linearna preslikava A, podana s predpisom
$$A\vec{x} = (\vec{x}\vec{a})\vec{b} + \vec{x} \times \vec{a}.$$
Določi matriko preslikave A v bazi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$.

17. Naj bo $A : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ linearna preslikava, podana s predpisom
$$(Ap)(x) = (x^2 + 2x + 3)p''(x) + (x + 1)p'(x) - 3p(x).$$
Zapiši matriko A v bazi $\{x^2, x, 1\}$.

18. Naj bo $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dana kvadratna matrika. Za $X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definirajmo $T(X) = AX$. Dokaži, da je T linearna preslikava in določi njeno matriko v bazi $\{E_{11}, E_{21}, \ldots, E_{n1}, E_{12}, \ldots, E_{n2}, \ldots, E_{1n}, \ldots, E_{nn}\}$, kjer E_{ij} označuje matriko, ki ima v i-ti vrstici in j-tem stolpcu element 1, vsi drugi elementi pa so enaki 0.

19. Dani sta bazi $E = \{(1,2), (-2,1)\}$ in $E' = \{(1,1), (-1,1)\}$ za prostor $\mathbb{R}^2$ ter bazi $F = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ in $F' = \{(1,1,0), (-1,0,1), (0,-1,1)\}$. Denimo, da ima linearna preslikava A v bazah E in F matriko

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi matriko preslikave A v bazah E' in F'.

20. Za linearno preslikavo $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ velja $A(1,1,0) = (1,0,0)$, $A(0,1,-1) = (2,2,-2)$ in $A(1,2,0) = (0,3,0)$. Določi matriko preslikave A v standardnih bazah.

21. Naj bo $Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje čez ravnino z enačbo $x + y + z = 0$. Zapiši matriko preslikave Z v standardnih bazah.

22. Dana sta podprostora $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ in $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 0 = x_2 = x_3 = x_4\}$ prostora $\mathbb{R}^4$. S pomočjo baz se prepričaj, da je prostor $\mathbb{R}^4$ direktna vsota podprostorov U in V ter zapiši matriko projetorja na prostor U vzdolž prostora V v standardnih bazah.

23. Določi rang matrik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2-t & 4 & 5+t & 4+t \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ -t & 3 & 1+t & 4+t \end{bmatrix}.$$

24. Dokaži, da je rang matrike A enak 1 natanko tedaj, ko obstajata taka neničelna stolpca U in V, da je $A = U \cdot V^T$.

25. Naj bo A realna kvadratna matrika ranga 1.

a) Dokaži, da obstaja tako realno število α, da je $A^2 = \alpha A$.

b) Naj bo $A^2 \neq -1$. Dokaži, da je tedaj matrika $A + I$ obrnljiva in velja $(A+I)^{-1} = I + \beta A$ za neko realno število β.

26. Poišči primer kvadratnih matrik za keteri velja $\text{rang}A = \text{rang}B$ in $\text{rang}A^2 = \text{rang}B^2$.

27. S pomočjo bločnega množenja matrik izračunaj produkt matrik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad .$$

28. Naj bosta A in C obrnljivi kvadratni matriki. Dokaži da velja

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

29. Dani sta matrika

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in bločno zapisana matrika

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & E & I \\ 0 & I & -E \end{bmatrix}.$$

Za naravno število n izračunaj potenco $(4A^{-1} - A^3)^n$.