Matrike

52. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
Poišči vse take matrike B, da bo veljalo $AB = I$.

53. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Poišči tako matriko X, da bo veljalo $AXA^T + X = 4I$.

54. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0 & \sin\phi & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \\ 0 & \cos\phi & 0 \end{bmatrix}.$$
Za vsako naravno število n izračunaj matriko A^n.

55. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & y \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix}.$$
Za vsako naravno število n izračunaj matriko A^n.

56. Poišči vse matrike $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, za katere velja $A^2 = 0$.

57. Izračunaj inverz matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

58. Izračunaj inverz matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

59. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Reši enačbo

$$AX(I+B) = B + A - I.$$

60. Dana je enačba

$$B + X = XA - BA.$$

(a) Dokaži: če je matrika $A - I$ obrnljiva, potem velja

$$X = B(A+I)(A-I)^{-1}.$$

(b) Izračunaj X v primeru

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

61. Določi rang matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

62. Določi rang matrike

$$A = \begin{bmatrix} -2-t & 4 & 5+t & 4+t \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ -t & 3 & 1+t & 4+t \end{bmatrix}$$

v odvisnosti od parametra t.

63. Naj bo

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Dokaži:

(a) Če je $A \in \mathbb{R}^{n,n}, A \neq 0$ matrika, za katero velja $AN = NA$, potem je $\operatorname{rang}(NA) < \operatorname{rang} A$.

(b) Poišči tako matriko $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, različno od 0, da je $\operatorname{rang}(NA) = \operatorname{rang} A$.

64. (a) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika, ki ima na diagonali same ničle. Pokaži, da obstajata taki matriki $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da velja $A = BC - CB$. Nasvet: za B vzemi primerno diagonalno matriko.
(b) Določi konkretni matriki B, C, za kateri velja

$$BC - CB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

65. Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ enaka

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Določi vse matrike $B \in R^{2\times 2}$, za katere je rešljiva matrična enačba $XA = X^\top A + B$. Koliko rešitev ima in kakšne oblike so rešitve za izbrani B?