

Matrike linearnih preslikav

66. Dana je preslikava $A : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$

$$(Ap)(x) = (xp(x+1))' - 2p(x).$$

Pokaži, da je linearna. Poišči njeno matriko v bazi $\{1, x, x^2\}$ ter njeno jedro in sliko.

67. Linearna preslikava $A : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ ima v bazi $\{1, x, x^2\}$ matriko

$$A_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči njeno matriko v bazi $\{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$.

68. Naj bo $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zrcaljenje čez ravnino $x+y-z=0$. S pomočjo prehoda na novo bazo poišči matriko tega zrcaljenja v standardni bazi.

69. Linearna preslikava $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je zrcaljenje čez premico

$$x = y = -2z.$$

Poišči njeno matriko v standardni bazi prostora \mathbb{R}^3 .

70. Dani so vektorji v \mathbb{R}^3 , $a = (-1, -2, 1)$, $b = (1, 1, 0)$, $c = (0, -1, 2)$. Linearna preslikava $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preslika vektor a v b , vektor b v c , vektor c pa v $2a$. Poišči njeno matriko v standardni bazi prostora \mathbb{R}^3 .

71. V prostoru so dane točke

$$A_1(1, 0, 2), A_2(0, 1, 2), A_3(1, 2, 0) \text{ in } A_4(1, -3, 2).$$

Linearna preslikava $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preslika točke A_1, A_2, A_3 zaporedoma v točke A_2, A_3, A_4 .

(a) Kam se preslika točka A_4 ?

(b) Ali obstaja taka točka različna od $(0, 0, 0)$, ki jo preslikava \mathcal{T} preslika samo vase?

72. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in $F : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ preslikava, podana s predpisom

$$(Fp)(x) = (xp(x+1))' + ax^2p\left(\frac{1}{x}\right) - 2p(x).$$

Pokaži, da je F linearna in določi njeno matriko v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[x]$. Določi a tako, da bo rang F čim manjši.

73. Preslikava $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je kompozitum pravokotne projekcije na ravnino $x + y + z = 0$ in vrtenja v tej ravnini za kot 30° v eno od smeri. Določi matriko, ki pripada preslikavi T v standardni bazi prostora \mathbb{R}^3 .
74. Na prostoru polinomov stopnje kvečjemu 2 sta dani preslikavi

$$A, B : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x],$$

kjer je

$$(Ap)(x) = p'(x) + x^2 p(1),$$

preslikava B pa ima v bazi $\{1, x + x^2, x - x^2\}$ matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kateri polinomi ležijo v jedru preslikave AB in kateri v sliki AB ?

75. Linearna preslikava $T_A : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je podana s predpisom

$$T_A(X) := AXA^{-1},$$

kjer je A neka obrnljiva matrika iz $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Določi vse matrike A , za katere preslikavi T_A v bazi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ prostora $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ustreza matrika

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$