Vaje: Operatorji na prostorih s skalarnim produktom

1. a) Določi vse ortogonalne matrike velikosti 2×2.

   b) Dokaži, da je preslikava unitarna natanko tedaj, ko ohranja normo vektorjev.

   c) Naj bo $U : V \to V$ unitarna preslikava unitarnega prostora V in $W \leq V$ vektorski podprostor. Dokaži, da velja $U(W)^\perp = U(W^\perp)$.

2. Za stolpec $a = [a_1, a_2, \ldots, a_n]^T \in \mathbb{C}^n$ označimo $a^* = [\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n]$. Pri predpostavki, da je norma vektorja a enaka 1, ugotovi za katere skalarje $\alpha \in \mathbb{C}$ je matrika $A = I - \alpha a \cdot a^*$

   a) unitarna?

   b) hermitska?

   c) hermitska in unitarna?

3. a) Dokaži, da je operator A normalen natanko tedaj, ko velja $A^* = p(A)$ za nek polinom p.

   b) Dokaži, da za normalen operator A velja $\|Ax\| = \|A^*x\|$ za vsak $x \in V$.

   c) Naj bo A normalen operator in $AB = BA$. Dokaži, da velja $A^*B = BA^*$. Kaj če A ni normalen operator?

4. Za matriko
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$
   določi tako ortogonalno matriko P, tako da bo P^TAP diagonalna matrika.

5. Dan je prostor V s skalarnim produktom $\langle\ ,\ \rangle$.

   a) Naj bo $A : V \to V$ pozitivno definitna preslikava. Dokaži, da je s predpisom
$$[v, w] = \langle v, Aw \rangle$$
   podan skalarni produkt na V.

b) Dokaži, da za vsak skalarni produkt $[\ ,\ ]$ obstaja natanko določena preslikava $A : V \to V$ z lastnostjo $[v, w] = \langle v, Aw \rangle$ in, da je A pozitivno definitna preslikava.

6. a) Dokaži, da predpis

$$[(x, y, z), (u, v, w)] = 2xu - yu - xv + 2yv - zv - yw + zw$$

predstavlja skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$ ter ugotovi ali matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

predstavlja normalni operator pri danem skalarnem produktu.

7. a) Ali obstaja antisimetrična ortogonalna matrika?

   b) Ali obstaja taka unitarna matrika U, da je $U^* = -U$?

8. Naj bo $P(x, y, z) = (x, y, 0)$. Določi jedro preslikave P^*, če veš, da so vektorji $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ in $(1, 1, 1)$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3$.

9. Naj bo $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza prostora V s skalarnim produktom. Definirajmo *Grammovo matriko* $G = [\langle v_i, v_j \rangle]_{i,j=1}^n$ in naj bo $A : V \to V$ linearna preslikava. Dokaži, da je G obrnljiva matrika, za katero velja

$$[A^*; B, B] = \overline{G}^{\,-1}[A; B, B]^* \overline{G}.$$

10. Na prostoru polinomov $\mathbb{C}_2[x]$ definirajmo skalarni produkt s predpisom

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} pq$$

in linearno preslikavo $A : \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}_2[x]$, podano s predpisom

$$(Ap)(x) = ((i + x)p(x))'.$$

S pomočjo Grammove matrike določi matriko adjungirane preslikave A^* v standardni bazi $\{1, x, x^2\}$.

11. Naj bosta A in T taka operatorja na prostoru s skalarnim produktom, da je A pozitivno definiten in velja

$$(A^{-1}T^*A)T = T(A^{-1}T^*A).$$

Dokaži, da se operator T diagonalizira.

12. Naj bo V prostor s skalarnim produktom in $B : V \to V$ linearna preslikava. Pravimo, da je sebi adjungirana preslikava B *nenegativno definitna*, če za vsaka $v, w \in V$ velja $\langle v, Bw \rangle \geq 0$.

Dokaži, da je $A : V \to V$ normalni operator natanko tedaj, ko velja

$$AA^* - A^*A \geq 0.$$