Prostori s skalarnim produktom

116. V prostoru $\mathbb{R}^2$ je dan predpis

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + y_1x_2 + x_2y_2.$$

Pokaži, da je to skalarni produkt.

117. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan predpis

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Pokaži, da je to skalarni produkt.

118. Dana je preslikava $f : \mathbb{R}^{3,3} \to \mathbb{R}$

$$f(A) = \operatorname{sl} A.$$

Pokaži, da je f linearen funkcional in poišči bazo njegovega jedra.

119. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 sta dana skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

in linearni funkcional

$$f(p) = 6\int_0^1 p(t)dt.$$

Poišči tak polinom $q \in \mathbb{R}_2[x]$, da bo za vsak p veljalo

$$f(p) = \langle p, q \rangle .$$

120. V prostoru $Lin\{1, \cos t, \sin t\}$ je dan skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt.$$

Določi pravokotno projekcijo funkcije $\cos t$ na jedro linearnega funkcionala

$$\mathcal{F}(f) = f(0).$$

121. V prostoru $\mathbb{C}^{2\times 2}$ je definiran skalarni produkt s predpisom

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{sl}(AB^*).$$

Pokaži, da sta matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pravokotni v tem skalarnem produktu in ju dopolni do ortogonalne baze prostora $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

122. Za poljubni realni 2×2 matriki A in B je definiran skalarni produkt

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{sl}(A^T B) + 2a_{11}b_{11} - a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11}$$

Poišči matriko, ki ustreza pravokotni projekciji na podprostor diagonalnih 2×2 matrik v standardni bazi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ prostora $\mathbb{R}^{2,2}$.

123. V $\mathbb{R}_3[x]$ je dan skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p'(0)q'(0) + p'(1)q'(1).$$

Določi kakšno ortonormirano bazo ortogonalnega komplementa $V^\perp$ prostora

$$V = \{p \in \mathbb{R}_3[x]; p(0) = p(1) = 0\}.$$

124. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + \int_0^1 p'(x)q'(x)\, dx.$$

Poišči kakšno ortonormirano bazo podprostora

$$U = \{p \in \mathbb{R}_2[x],\ p(1) = p'(0)\}$$

in jo dopolni do ortogonalne baze prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

125. V $\mathbb{R}^n$ je dan skalarni produkt, v katerem tvorijo vektorji

$$(1, 0, ..., 0), (1, -1, 0, ..., 0), (1, 0, -1, 0, ..., 0), ..., (1, 0, ..., 0, -1)$$

ortonormiran sistem. V tem skalarnem produktu določi ortogonalni komplement premice, napete na vektor $(1, 1, ..., 1)$.