Relacije

26. V množici celih števil $\mathbb{Z}$ definiramo relacijo kongruence po modulu m, kjer je m neko naravno število, z naslednjim pravilom:

$$a \equiv b \iff m|(a-b).$$

Pokaži, da je $\equiv$ ekvivalenčna relacija in opiši ekvivalenčne razrede $[a]_{\equiv}$, kjer je a izbrano celo število. Kako si lahko predstavljamo $\mathbb{Z}/\equiv$?

27. V množico urejenih parov $\{(m,n);\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ uvedemo relacijo

$$(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc.$$

Pokaži, da je ekvivalenčna. Kaj je $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\sim$?

28. V ravnini $\mathbb{R}^2$ je definirana relacija

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Pokaži, da je ekvivalenčna, opiši ekvivalenčni razred $[(x,y)]_{\sim}$ in množico ekvivalenčnih razredov $\mathbb{R}^2/\sim$.

29. V množici naravnih števil uvedemo relacijo deljivosti:

$$a|b \iff \exists k \in \mathbb{N} : b = ka.$$

   (a) Pokaži, da relacija $|$ množico naravnih števil delno ureja.
   (b) Število $n \in \mathbb{N}$ je zgornja meja za množico $A \subseteq \mathbb{N}$, če velja $a|n$ za vse $a \in A$. Podobno je $n \in \mathbb{N}$ spodnja meja za A, če $n|a$ za vse $a \in A$. Za dani naravni števili $a, b \in \mathbb{N}$ poišči natančno zgornjo in natančno spodnjo mejo množice $\{a, b\}$.

30. Za relacijo $\sim$ na množici M pravimo, da je krožna, če za vse $x, y, z \in M$ velja sklep:

$$(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow (z \sim x).$$

Pokaži, da je refleksivna relacija krožna natanko tedaj, ko je ekvivalenčna.