Vaje: relacije in algebrske strukture

1. Katere lastnosti imajo relacije R, S, T na množici premic v ravnini:

   a) $p\, R\, q \Leftrightarrow p \cap q = \emptyset$

   b) $p\, S\, q \Leftrightarrow p \perp q$

   c) $p\ T\, q \Leftrightarrow p \cap q \neq \emptyset$

2. V množico kompleksnih števil $\mathbb{C}$ vpeljemo relacijo $\approx$:

   $$u \approx v \Leftrightarrow i(u - v) \in \mathbb{R}$$

   Dokaži, da je $\approx$ ekvivalenčna relacija in določi faktorsko množico, tj. množico ekvivalenčnih razredov.

3. Dana je premica s v ravnini. Naj bo X množica vseh od s različnih premic v ravnini. V množico X vpeljemo relacijo $\approx$:

   $$p \approx q \Leftrightarrow p \cap q \cap s \neq \emptyset$$

   Dokaži, da je $\approx$ ekvivalenčna relacija in določi faktorsko množico.

4. V množico naravnih števil $\mathbb{N}$ vpeljemo relacijo $\approx$:
   $m \approx n \Leftrightarrow \exists$ lihi števili $k, l : kn = lm$
   Dokaži, da je $\approx$ ekvivalenčna relacija in določi faktorsko množico.

5. Dokaži, da je relacija R na množici M ekvivalenčna natanko takrat, kadar je refleksivna in velja implikacija $(xRy\ \&\ xRz) \Rightarrow yRz$.

6. Dokaži, da deljivost določa relacijo delne urejenosti na vsaki podmnožici $A \subset \mathbb{N}$ naravnih števil. Skiciraj diagram te relacije za množico $A = \{2, 3, 5, 6, 12, 15\}$.

7. Dokaži, da je relacija L na množici $\mathbb{R}^2$ definirana s predpisom

   $$(a, b)L(c, d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ ali } (a = c \& b \leq d)$$

   relacija delne urejenosti. Relacijo L imenujemo *leksikografska urejenost*.

8. Ugotovi ali so naslednje operacije na množici realnih števil asociativne in komutativne. Za vsako operacijo ugotovi še ali obstajajo enote.

   a) $a \circ b = a^2 + b^2$

   b) $a \circ b = ab^2$

   c) $a \circ b = a + b + ab$

9. Pokaži, da je množica kompleksnih števil $\mathbb{C}$ polgrupa za operacijo $a \circ b = |a|b$. Ali je $(\mathbb{C}, \circ)$ monoid?

10. Naj bo M množica vektorjev v ravnini ter $\vec{i}$ in $\vec{j}$ pravokotna enotska vektorja. Dokaži, da je M monoid za operacijo

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (\vec{a}\vec{j})\vec{b} + (\vec{a}\vec{i})\vec{i}.$$

11. Naj bo S množica funkcij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblike $f(x) = ax + b$, kjer je $a \neq 0$. Pokaži, da je S grupa za običajno komponiranje funkcij. Katere podmnožice grupe S so podgrupe?

   1) $\{f \in S \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

   2) $\{f \in S \mid a = 1, b$ liho celo število $\}$

   3) $\{f \in S \mid a = 1, b$ sodo celo število $\}$

   4) $\{f \in S \mid b$ celo število $\}$

   5) $\{f \in S \mid a \in \mathbb{Q}\}$

12. Naj bo G poljubna grupa. Dokaži, da je *center grupe* $C(G) = \{s \in G \mid \forall g \in G : sg = gs\}$ podgrupa grupe G.

13. Dokaži, da je presek podgrup podgrupa. Ali to velja tudi za unijo podgrup?

14. Prepričaj se, da so naslednje preslikave homomorfizmi. Ali je katera izmed njih izomorfizem?

   a) $f : (\mathbb{C}, \cdot) \to (\mathbb{R}, \cdot)$, $f(z) = |z|$

   b) $f : (\mathbb{R}, +) \to ((0, \infty), \cdot)$, $f(x) = a^x$

15. Ali obstaja epimorfizem $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_3$?

16. Dokaži, da je G komutativna grupa natanko tedaj, ko predpis $f(x) = x^2$ določa homomorfizem grupe.

17. a) Določi produkta (123456)(32)(512) in (512)(32)(1234567).

    b) Določi inverza $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$ in $(13542)^{-1}$.

    c) Izrazi permutacijo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ kot produkt disjunktnih ciklov.

18. Določi lihost permutacij

    a) cikel dolžine k,

    b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$,

    c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

19. Določi red permutacije (512)(32)(1234567) in nato red poljubne permutacije.