Vaje: Sistemi linearnih enačb

1. Poišči kakšno bazo prostora rešitev naslednjih homogenih sistemov linearnih enačb:

   (a)

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 0 \\ x + 5y + z &= 0 \\ 3x + 5y + 8z &= 0 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 0 \\ x + z &= 0 \\ y + u &= 0 \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} x + 2y - z + 3u - 4v &= 0 \\ 2x + 4y - 2z - u + 5v &= 0 \\ 2x + 4y - 2z + 4u - 2v &= 0 \end{aligned}$$

2. Če so rešljivi, napiši rešitve naslednjih nehomogenih sistemov linearnih enačb kot vsoto partikularne rešitve in rešitve ustreznega homogenega sistema:

   (a)

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} 2x + y - z + u &= 1 \\ 3x - 2y + 2z - 3u &= 2 \\ 5x + y - z + 2u &= -1 \\ 2x - y + z - 3u &= 4 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z - 4u &= 4 \\ y - z + u &= -3 \\ x + 3y - 3u &= 1 \\ -7y + 3u + z &= -3 \end{aligned}$$

3. Določi $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo sistem enačb rešljiv in ga nato reši:

$$\begin{aligned} 2x - y + z + u &= 1 \\ x + 2y - z + 4u &= 2 \\ x + 7y - 4z + 11u &= a \end{aligned}$$

4. Glede na $\lambda \in \mathbb{R}$ obravnavaj naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} (8-\lambda)x + 2y + 3z + \lambda u &= 0 \\ x + (9-\lambda)y + 4z + \lambda u &= 0 \\ x + 2y + (10-\lambda)z + \lambda u &= 0 \\ x + 2y + 3z + \lambda u &= 0 \end{aligned}$$

5. Naj bodo $a, b_0, b_1, \ldots, b_n$ realna števila. Pokaži, da obstaja realni polinom p stopnje največ n, za katerega velja:

$$p(a) = b_0,\ p'(a) = b_1,\ \ldots,\ p^{(n)}(a) = b_n.$$

6. Poišči kak homogen sistem z minimalnim številom enačb, tako da bo njegov prostor rešitev razpet na vektorje $X_1 = (1, 4, -2, 2, 1)$, $X_2 = (3, 13, -1, 2, 1)$ in $X_3 = (2, 7, -8, 4, -5)$.

7. Naj bodo $a_1, \ldots, a_n$ in $b_1, \ldots, b_{n+1}$ dana realna števila. Določi vse $\lambda \in \mathbb{R}$, za katere je sistem enačb

$$\begin{aligned} \lambda x_i + a_i x_{n+1} &= b_i \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \lambda x_{n+1} &= b_{n+1} \end{aligned}$$

enolično rešljiv in ga nato reši.

8. Določi vse $\lambda \in \mathbb{R}$, za katere je sistem

$$\begin{aligned} x_1 + \lambda x_n &= 1 \\ -(i-1)x_{i-1} + ix_i + \lambda x_n &= i \qquad \text{za } i = 2, 3, \ldots, n-1 \\ -(n-1)x_{n-1} + \lambda x_n &= n \end{aligned}$$

rešljiv in ga nato reši.