

Vaje: Skalarni produkt

1. V prostoru $\mathbb{R}_n[x]$ realnih polinomov stopnje največ n je podano pravilo

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} p(k)q(k) .$$

Pokaži, da je to pravilo skalarni produkt in poišči kakšno ortogonalno bazo prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

2. Med rešitvami sistema enačb

$$\begin{aligned} 2x + y + z + 3u &= 0 \\ 3x + 2y + 2z + u &= 0 \\ x + 2y + 2z - 9u &= 0 \end{aligned}$$

poišči tisto, ki je najbližja točki $(7, -4, -1, 2)$.

3. Poišči kakšno ortogonalno bazo linearne ogrinjače vektorjev $(1, -1, 1, 1)$, $(-1, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 2)$ v \mathbb{R}^4 glede na običajni skalarni produkt.
4. Določi matriko, ki v standarni bazi pripada pravokotni projekciji na linearno ogrinjačo vektorjev $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$ (glede na običajni skalarni produkt v \mathbb{R}^4).
5. Določi kakšno ortogonalno bazo ortogonalnega komplementa linearne ogrinjače vektorjev $(1, 2, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$.
6. V $\mathbb{R}_2[x]$ vpelji pravilo za skalarni produkt tako, da bodo polinomi 1 , $x - 1$ in $1 - x^2$ ortonormirana baza. Nato poišči kot med polinomoma x in x^2 .
7. Določi linearni funkcional $f \in (\mathbb{R}^3)^*$, za katerega velja: $f(1, 1, -1) = 2$, $f(3, -1, -1) = 4$ in $f(-5, 1, 3) = 6$.
8. V $\mathbb{R}_2[x]$ je podan skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^2 p(x)q(x) dx ,$$

linearni funkcional $F \in \mathbb{R}_2[x]$ pa je dan s pravilom

$$F(p) = \int_0^1 p(x) dx.$$

Poišči polinom, ki pripada F po Rieszovemu izreku.

9. Poišči pravilo za A^* , če je $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in

(a) $A\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}$,

(b) $A\vec{x} = (\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b}$.

10. Naj bo P projekcija na ravnino $x - y + z = 0$ vzdolž premice $x = y = z$.
Katera matrika ustreza P^* v standardni bazi?

11. Pokaži, da je $B^*A = 0$ natanko tedaj, ko je $\text{im } B \subseteq (\text{im } A)^\perp$.

12. Pokaži, da je $\ker A^*A = \ker A$.

13. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ je podan skalarni produkt

$$(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Poišči matriko, ki v standardni bazi ustreza operatorju, ki je adjungiran odvajanju.