Vaje: vektorji v $\mathbb{R}^3$

1. V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ označimo $\vec{x} = \vec{AB}$ in $\vec{y} = \vec{BC}$. Izrazi vektorje $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BE}$, $\vec{AE}$, $\vec{BF}$ in $\vec{DF}$ kot linearne kombinacije vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{y}$.

2. V trikotniku ABC je točka F razpolovišče stranice BC, točka E pa deli stranico AC v razmerju $AE : EC = 1 : 2$. Točka S je presečišče daljic AF in BE. Določi razmerje $AS : SF$.

3. V paralelogramu $ABCD$ je točka E razpolovišče AB, točka F pa razpolovišče BC. Pokaži, da daljici DE in DF razdelita diagonalo AC na tri enake kose.

4. V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ je točka G razpolovišče EF in točka S presečišče daljic GB in AC. Določi razmerje $AS : SC$.

5. Pokaži, da se v tristrani piramidi spojnice razpolovišč mimobežnih robov sekajo. V kakšnem razmerju?

6. V tristrani piramidi $ABCD$ točka E deli rob AD v razmerju $AE : ED = 1 : 1$, točka F rob AC v razmerju $AF : FC = 4 : 1$ in točka G rob AB v razmerju $AG : GB = 2 : 1$. Točka T je težišče ploskve BCD. V kakšnem razmerju odreže trikotnik EFG daljico AT?

7. V paralelogramu $ABCD$ potegnemo vzporednico k AB, ki seka BC in AD v točkah Q in S, in vzporednico k BC, ki seka AB in DC v P in R. Pokaži, da se nosilke daljic AC, PQ in RS bodisi sekajo v eni točki bodisi so vzporedne. Kdaj so vzporedne?

8. a) Ali je vektor $(8, 2, -14)$ linearna kombinacija vektorjev $(3, 1, -5)$ in $(-2, 0, 4)$?

   b) Ali je vektor $(3, -7, -3)$ linearna kombinacija vektorjev $(1, 0, -2)$, $(-4, 3, 8)$ in $(2, 5, -4)$?

   c) Za katere x leži vektor $(x, -3, -5)$ v ravnini vektorjev $(1, 0, -2)$ in $(-2, 1, 7)$?

9. a) Izračunaj kot med vektorjema $(2, 1, 2)$ in $(2, 2, -1)$.

   b) Zapiši vektor $(3, 0, 3)$ kot vsoto vektorja vzporednega vektorju $\vec{a} = (4, 4, 2)$ in vektorja pravokotnega na vektor $\vec{a}$.

10. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enotska vektorja, za katera velja, da sta vektorja $\vec{a}+2\vec{b}$ in $5\vec{a}-4\vec{b}$ pravokotna. Določi kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

11. Naj bosta $\vec{a}+2\vec{b}$ in $\vec{a}-\vec{b}$ pravokotna enotska vektorja. Določi kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

12. Naj bo $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$, $|\vec{c}| = 7$ in $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$. Izračunaj vsoto $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

13. Izračunaj kote in dolžine stranic trikotnika ABC s oglišči $A(0,3,4)$, $B(3,2,3)$ in $C(1,4,1)$.

14. Naj bodo A, B, C, D poljube točke v prostoru. Dokaži, da velja $\vec{BC}\cdot\vec{AD}+\vec{CA}\cdot\vec{BD}+\vec{AB}\cdot\vec{CD} = 0$.

15. Dokaži, da se nosilke višin poljubnega trikotnika sekajo v skupni točki, tj. *višinski točki.*

16. Dokaži: Če se v tetraedru $ABCD$ sekata višini iz oglišč A in D, sta stranici AD in BC pravokotni.

17. Trikotnik ABC ima oglišča $A(3,1,2)$, $B(0,-5,-1)$ in $C(-1,-1,4)$. Določi koordinate presečišča višine na stranico AB in težiščnice iz A.

18. Kvadrat ima za presečišče diagonal točko $S(2,1,-2)$ in je pravokoten na premico skozi izhodišče in S. Eno od oglišč kvadrata ima vse tri koordinate enake. Določi vsa oglišča kvadrata.

19. Določi os stožca, ki ima vrh v izhodišču, na njegovem plašču pa ležijo točke $A(1,0,1)$, $B(0,1,-1)$ in $C(2,2,0)$.

20. Naj bo S središče trikotniku ABC očrtanega kroga. Pokaži, da je z vektorjem $\vec{SH} = \vec{SA}+\vec{SB}+\vec{SC}$ določena višinska točka H tega trikotnika.

21. V deltoidu $ABCD$, ki je simetričen glede na diagonalo AC poznamo koordinate točk $A(-5,6,-4)$, $B(-4,-1,2)$ in $C(-1,-2,4)$. Določi koordinate točke D.

22. Pokaži, da sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna natanko tedaj, ko sta linearno neodvisna vektorja $\vec{a}-\vec{b}$ in $\vec{a}+\vec{b}$.

23. V štirikotniku $ABCD$ naj bodo P, Q, R in S razpolovišča stranic AB, BC, CD in DA. Naj bo X presečišče BR in DQ, Y pa presečišče BS in DP. Če je $\vec{BX} = \vec{YD}$, pokaži, da je $ABCD$ paralelogram.

24. Točke $A(3, 1, 1)$, $B(1, 3, 4)$, $C(-1, -1, 1)$ in $D(3, -2, 7)$ so oglišča tristrane piramide. Določi nožišče višine iz D.

25. Trikotnik ABC je podan z oglišči $A(1, 2, 1)$, $B(3, -2, 0)$ in $C(0, 3, 1)$. Določi:

    (a) njegov obseg in ploščino;

    (b) središče očrtanega kroga;

    (c) središče včrtanega kroga.

26. Določi višinsko točko trikotnika z oglišči $A(2, 4, 5)$, $(3, -6, 3)$ in $C(2, 2, 2)$.

27. Trikotnik ABC ima oglišči $A(1, 0, -1)$, $B(2, 2, 1)$ in težišče $T(-1, 2, 1)$. Določi oglišče C.

28. Naj bodo vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ paroma nevzporedni. Dokaži:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

29. Denimo, da vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ določajo tetraeder s prostornino 3. Izračunaj prostornino tetraedera, določenega z vektorji $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ in $\vec{c} \times \vec{a}$?

30. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ neničelna pravokotna vektorja. Reši vektorsko enačbo

$$(\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{b} = \vec{a} \times \vec{x}.$$

31. Dan je štirikotnik s stranicami a, b, c, d, in diagonalama e, f. Dokaži enakost

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2,$$

    kjer je m razdalja med razpoloviščema diagonal. Kaj dobimo, če je dani štirikotnik paralelogram?

32. Dani so vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ v prostoru. Dokaži:

    a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$.

    b) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$.

c) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b} - (\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}$.

d) Za nekomplanarne vektorje $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ in poljuben vektor $\vec{d}$ velja

$$\vec{d} = \frac{(\vec{d},\vec{b},\vec{c})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}\vec{a} + \frac{(\vec{a},\vec{d},\vec{c})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}\vec{b} + \frac{(\vec{a},\vec{b},\vec{d})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}\vec{c}.$$

33. Naj bodo $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ nekomplanarni vektorji. Dokaži, da obstajajo natanko določeni vektorji $\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3}$, ki zadoščajo pogojem $\vec{a_i}\vec{b_j} = \delta_{ij}$, kjer je $\delta_{ii} = 1$ in $\delta_{ij} = 0$ za $i \neq j$. Ugotovi še, da so tudi vektorji $\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3}$ nekomplanarni.

34. Poišči vektorsko enačbo valja s polmerom $a > 0$ in osjo, ki poteka skozi izhodišče in ima smer vektorja enotskega vektorja $\vec{e}$.